ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XXVI

FASC. 3—4

SZEGED, 1965

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

26. KÖTET
3—4. FÜZET

SZEGED, 1965. DECEMBER

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

On unitary group representations in spaces with indefinite metric

By M. A. NAÏMARK in Moscow (USSR)

1. Let G be a topological group and X a linear topological space. By a representation of G in X there is meant a mapping $g \to U_g$ of G into linear continuous operators U_g in X satisfying the following conditions:

1. $U_e = 1$, where e is the group unit in G and 1 is the identity operator in X;
2. $U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2}$ for any $g_1, g_2 \in G$;
3. $g \to U_g x$ is a continuous mapping of G into X for any fixed $x \in X$.

X is then called the *representation space.*

A representation $g \to U_g$ is called *irreducible* if no non-trivial closed subspace of X exists, which is invariant with respect to all operators U_g, $g \in G$. A representation $g \to U_g$ is called *unitary,* if X is a Hilbert space with the norm topology and all U_g are unitary operators in X.

In what follows we consider only locally compact groups with a countable neighborhood basis. It is known (cf. e. g. [1] ch. 8) that every unitary representation of such a group in a separable Hilbert space can be realized as a direct integral of irreducible representations. For non-unitary representations no analogous result holds; even in finite dimensional spaces there can exist reducible but not completely reducible (i. e. non decomposable) representations.

So a question arises: in what manner can a reducible representation be constructed with the aid of irreducible ones. There is no hope, at the present stage of the spectral theory of non self-adjoint operators, to solve this problem in its full generality. It seems, however, to be reasonable to develop a theory of sufficiently large classes of non-unitary group representations, which would be similar to the theory of generalized spectral operators with spectral singularities constructed by LYANZE [2—5] and having its origin in DUNFORD's [6] theory of spectral operators and in my works [7, 8] on spectral decomposition of non-self adjoint differential operators.

As the first step in the realization of this program we consider representations in Pontryagin spaces $\Pi_\varkappa$, which are unitary in the indefinite metric of $\Pi_\varkappa$, but not unitary in the usual sense.

The results which will be reported here, are to be considered as the beginning of the corresponding theory. We recall that the space $\Pi_\varkappa$ can be defined in the following manner. It is a Hilbert space H with a usual inner product $[x, y]$ and an indefinite inner product (x, y) which, for some complete orthonormal system $\{e_j\}$ in H, is defined by

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\varkappa} \xi_j \bar{\eta}_j - \sum_{j>\varkappa} \xi_j \bar{\eta}_j,$$

where

$$\xi_j=[x, e_j], \quad \eta_j=[y, e_j],$$

$\varkappa$ is a fixed positive integer and $\varkappa<\dim H$. A set $S\subset\Pi_\varkappa$ is called positive (resp. negative, non-negative, non-positive, null) if $(x, x)>0$ (resp. <0, $\geqq 0$, $\leqq 0$, $=0$) for $x\in S$, $x\neq 0$.

A linear operator U in $\Pi_\varkappa$ is called *unitary* in $\Pi_\varkappa$ if it maps $\Pi_\varkappa$ onto $\Pi_\varkappa$ in one-to-one manner and $(Ux, Uy)=(x, y)$ for all $x, y\in\Pi_\varkappa$. A representation $g\to U_g$ in $\Pi_\varkappa$ is called *unitary in* $\Pi_\varkappa$ if all U_g are unitary in $\Pi_\varkappa$. The study of such representations must be based on the theory of operator algebras B in $\Pi_\varkappa$ which are symmetric in the following sense: if $A\in B$, then also $A^*\in B$, where A^* is defined by

$$(1) \qquad (Ax, y)=(x, A^*y).$$

The study of such general algebras is not begun and many problems about such algebras remain open. But if we want, for the case of unitary representations in $\Pi_\varkappa$, to solve the problem of description of the reducible representations posed above, then only *commutative* symmetric operator algebras in $\Pi_\varkappa$ need be considered.

The theory of such algebras is closely related, but not reduces to the spectral theory of J-self-adjoint operators in $\Pi_\varkappa$ spaces developed by M. Krein and H. Langer [9].

2. Let B and B' be two symmetric commutative operator algebras in spaces $\Pi_\varkappa$ and $\Pi'_\varkappa$; B and B' will be called equivalent if a linear mapping of $\Pi_\varkappa$ onto $\Pi'_\varkappa$ exists, which preserves the indefinite inner product and maps B onto B'. A problem arises to describe commutative symmetric operator algebras in $\Pi_\varkappa$ up to equivalence. The solution of an analogous problem is known for operator algebras in usual Hilbert space (cf. e. g. [10] or [1]); we give it here for the space $\Pi_\varkappa$. The main tool is the following result [11], which is a generalization to operator families of the Pontryagin—Krein—Johvidov theorem (See e. g. [12]).

Theorem 1. *For every family of commuting unitary operators in $\Pi_\varkappa$ there exists a non-negative $\varkappa$-dimensional subspace which is invariant with respect to all operators of the family.* [1])

Now let B be a commutative symmetric operator algebra in $\Pi_\varkappa$. As a corollary to Theorem I, it follows that a non-negative $\varkappa$-dimensional subspace $\mathfrak{P}$ exists, which is invariant with respect to all $A\in B$. But $\mathfrak{P}$ being finite-dimensional, a vector $x\in\mathfrak{P}$, $x\neq 0$, must exist which is a common eigenvector for all $A\in B$, i. e.

$$(2) \qquad Ax=\lambda(A)x \text{ for all } A\in B.$$

The function $A\to\lambda(A)$ is easily seen to be a homomorphism of B into the complex number field C. Any such homomorphism $A\to\lambda(A)$ will be called an eigenfunctional of B if a non-negative vector $x\neq 0$ exists, satisfying condition (2). The argument above shows, that eigenfunctionals always exist. For an eigenfunctional $\lambda(A)$ the set

$$S_\lambda=\{x: x\in\Pi_\varkappa, (A-\lambda(A)\cdot 1)^k x=0 \text{ for some } k=k(x) \text{ and all } A\in B\}$$

[1]) The assertion of Theorem I remains also valid for a family of non-commuting unitary operators in $\Pi_\varkappa$, if the family forms a unitary representation of a connected solvable group (see [13]). We note also that Theorem I contains the solution for $\Pi_\varkappa$ of a problem posed by Phillips [14].

is called the *root manifold* of λ. It is easily seen to be invariant with respect to all operators $A \in B$.

An eigenfunctional $\lambda(A)$ of B will be called *real*, if $\lambda(A^*) = \overline{\lambda(A)}$ for all $A \in B$, and *non-real* in the contrary case. The non-real eigenfunctionals of B, if they exist at all, form a finite set $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \ldots, \lambda_\sigma, \mu_\sigma$ of distinct functionals, where $\mu_j(A) = \lambda_j(A^*)$.

The corresponding root manifolds S_{λ_j}, S_{μ_j} are skewly related nullspaces. This means that no vector $x \in S_{\lambda_j}$, $x \neq 0$, is orthogonal to S_{μ_j} and no vector $y \in S_{\mu_j}$, $y \neq 0$, is orthogonal to S_{λ_j}. Thus $S_{\lambda_j} \dotplus S_{\mu_j}$ is a finite-dimensional $\Pi_\varkappa$ space, which is invariant with respect to all $A \in B$ and the restriction of B to $S_{\lambda_j} \dotplus S_{\mu_j}$ can be easily described. Moreover, $S_{\lambda_j} \dotplus S_{\mu_j} \perp S_{\lambda_k} \dotplus S_{\mu_k}$ for $j \neq k$ with respect to (x, y). The space $H = \sum_{j=1}^{\sigma} \oplus (S_{\lambda_j} \dotplus S_{\mu_j})$ is called the *hyperbolic space* of B. It follows from the above that H is invariant with respect to all $A \in B$, hence $H^\perp$ has the same property. The restriction of B to H is easily described and the restriction of B to $H^\perp$ has no non-real eigenfunctionals. So in what follows we may assume that B has no non-real eigenfunctionals. Let $\mathfrak{P}$ be a non-negative $\varkappa$-dimensional subspace, invariant with respect to all $A \in B$, and let $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ be all the distinct (real) eigenfunctionals of B with eigenvectors in $\mathfrak{P}$. Put $\varrho_j = \dim (S_{\lambda_j} \cap \mathfrak{P})$. Then λ_j and ϱ_j do not depend on the choice of $\mathfrak{P}$ and the λ_j form the set of all distinct (real) eigenfunctionals of B. We put

$$\mathfrak{Q}_j = \{x : (A - \lambda(A)1)^{\varrho_j} x = 0 \text{ for all } A \in B\} \tag{3}$$

and

$$\mathfrak{Q} = \sum_{j=1}^{p} \cdot \mathfrak{Q}_j, \tag{4}$$

then $\mathfrak{Q}$ is a closed subspace in $\Pi_\varkappa$ and any $\varkappa$-dimensional non-negative subspace, which is invariant with respect to all $A \in B$, is contained in $\mathfrak{Q}$.

It follows that the space $\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}^\perp$ is non-positive. The spaces $\mathfrak{Q}$ and $\mathfrak{M}$ are called *the principal space* and *the basic space* of B. The intersection $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{M}$ is a nullspace; it is called *the basic nullspace* of B. All these subspaces are easily seen to be invariant with respect to all $A \in B$.

Now let $\mathfrak{N}'$ be a nullspace in $\Pi_\varkappa$ which is skewly related to $\mathfrak{N}$; we put $\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}'^\perp$, $\Pi = \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{N}'^\perp$. Then $\mathfrak{H}$ is negative, i. e. essentially a Hilbert space, Π positive, negative, or a $\Pi_\varkappa$-space, and

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{H}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{N} \oplus \Pi, \tag{6}$$

$$\Pi_\varkappa = (\mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{N}') \oplus \mathfrak{H} \oplus \Pi. \tag{7}$$

We consider first B on $\mathfrak{N}$. As $\mathfrak{N}$ is finite-dimensional (as a nullspace), and all $A \in B$ commute, there exists in $\mathfrak{N}$ a basis

$$\{x_{jl}\} \qquad \left(l = 1, \ldots, r_j;\ j = 1, \ldots, q;\ \sum_{j=1}^{q} r_j = \dim \mathfrak{N}\right)$$

such that the matrix of any $A \in B$ in this basis has a triangular form, namely

$$(8) \qquad Ax_{jl} = \sum_{s=1}^{l} \lambda_{jls}(A) x_{js}$$

with diagonal elements $\lambda_{jll}(A) = \lambda_j(A)$, $j = 1, \ldots, q$.

Let $\{y_{jl}\}$ be a basis in $\mathfrak{N}'$, which is biorthogonal to $\{x_{jl}\}$.

Using (7) we put

$$(9) \qquad A^* y_{jl} = n_{jl}(A) + n'_{jl}(A) + h_{jl}(A) + \pi_{jl}(A),$$

where

$$n_{jl}(A) \in \mathfrak{N}, \quad n'_{jl}(A) \in \mathfrak{N}', \quad h_{jl}(A) \in \mathfrak{H}, \quad \pi_{jl}(A) \in \Pi.$$

With the use of (5) and (9) we get further

$$(10) \qquad Ah = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{r_j} (h, h_{jl}(A)) x_{jl} + A_1 h \quad \text{for} \quad h \in \mathfrak{H},$$

where A_1 is an operator in $\mathfrak{H}$. The mapping $A \to A_1$ is a norm-continuous symmetric homomorphism of B onto a commutative symmetric operator algebra B_1 in the Hilbert space $\mathfrak{H}$, with A_1^* the usual adjoint operator.

The algebra B_1 does not depend, up to equivalence, on the choice of $\mathfrak{N}'$. We suppose that B contains the identity operator 1 and that $\Pi_\varkappa$ is separable; then B_1 can be realized in the following known manner (see e. g. [10] or [1]). Let $\bar{B}_1$ be the closure of B_1 in the operator norm, T the bicompact space of maximal ideals t of $\bar{B}_1$, and $A(t)$ the value of $A_1 \in B_1$ at t. There exists a Borel measure σ on T and a σ-measurable family of Hilbert spaces $\mathfrak{H}(t)$, $t \in T$, such that, up to equivalence,

$$(11) \qquad \mathfrak{H} = \int_T \mathfrak{H}(t)\, d\sigma,$$

$$(12) \qquad A_1\{h(t)\} = \{A(t) h(t)\}$$

for $h = \{h(t)\} \in \mathfrak{H}$, $A_1 \in B_1$, $\{A(t) : A_1 \in \bar{B}_1\} = C(T)$, and $\{A(t) : A_1 \in B_1\}$ is dense in $C(T)$. In an analogous manner we have

$$(13) \qquad A\pi = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{r_j} (\pi, \pi_{jl}(A)) x_{jl} + A_2 \pi \quad \text{for} \quad \pi \in \Pi,$$

where A_2 is an operator in Π. The mapping $A \to A_2$ is also a continuous symmetric homomorphism onto a symmetric commutative operator algebra B_2 in Π, which up to equivalence does not depend on the choice of $\mathfrak{N}'$. Using further (3) and (4) we find that $\Pi = \sum_{j=1}^{p} \oplus \Pi^j$, where Π^j are subspaces of Π, invariant with respect to all $A_2 \in B_2$. Moreover, on each Π^j we have

$$(14) \qquad (A_2 - \lambda_j(A_2) 1)^{\varrho_j} = 0 \quad \text{for all } A_2 \in B_2.$$

An algebra satisfying (14) will be called *degenerate*. So we see that the restriction of B_2 on each Π^j is a degenerate algebra. If Π^j is positive or negative, then the degenerate algebra is easily seen to be the algebra of the scalar multiples of the identity operator. If Π^j is a Π_κ space, then the general form of degenerate algebras can be described by using Theorem I. Finally the $n_{jl}(A)$ and $n'_{jl}(A)$ have the form

$$n_{jl}(A) = \sum_{j'=1}^{q} \sum_{l'=1}^{r_{j'}} \alpha_{jlj'l'}(A) x_{j'l'}, \tag{15}$$

$$n'_{jl}(A) = \sum_{l'=l}^{r_j} \overline{\lambda_{jl'l}(A)} y_{jl'}, \tag{16}$$

where $\alpha_{jlj'l'}(A)$ are some complex valued functions on B. Substituting this in (9) with A^* instead of A we get

$$Ay_{jl} = \sum_{j'=1}^{q} \sum_{l'=1}^{r_{j'}} \alpha_{jlj'l'}(A^*) x_{j'l'} + \sum_{l'=l}^{r_j} \overline{\lambda_{jl'l}(A^*)} y_{jl'} + h_{jl}(A^*) + \pi_{jl}(A^*). \tag{17}$$

Equations (8), (10), (13), (17) define the operators $A \in B$. If we want now to describe up to equivalence all possible commutative symmetric algebras B, we omit A in the right hand and write these equations in the form:

$$Ax_{jl} = \sum_{s=1}^{l} \lambda_{jls} x_{js}, \tag{18}$$

$$Ah = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{r_j} (h, h_{jl}) x_{jl} + A_1 h, \tag{19}$$

$$A\pi = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{r_j} (\pi, \pi_{jl}) x_{jl} + A_2 \pi, \tag{20}$$

$$Ay_{jl} = \sum_{j'=1}^{q} \sum_{l'=1}^{r_{j'}} \alpha^*_{jlj'l'} x_{j'l'} + \sum_{l'=l}^{r_j} \overline{\lambda^*_{jl'l}} y_{jl'} + h^*_{jl} + \pi^*_{jl}, \tag{21}$$

where the systems $\xi = \{\lambda_{jls}, \alpha_{jlj'l'}, h_{jl}, \pi_{jl}, A_1, A_2\}$ defining the operators A run over some linear manifold Ξ on which an involution $\xi \to \xi^* = \{\lambda^*_{jls}, \alpha^*_{jlj'l'}, h^*_{jl}, \pi_{jl}\, A^*_1, A^*_2\}$ is defined and which satisfies the following set of axioms, expressing the fact, that the corresponding operators A run over a commutative symmetric algebra:

1. $\xi^{**} = \xi$;
2. $(c\xi)^* = \bar{c}\xi^*$ for $c \in C, \xi \in \Xi$;
3. $(\xi + \xi')^* = \xi^* + \xi'^*$ for $\xi, \xi' \in \Xi$;
4. A^*_1, A^*_2 coincide with the adjoint operators in B_1, B_2, $\alpha^*_{jlj'l'} = \bar{\alpha}_{j'l'jl}$;

5. for any $\xi, \xi' \in \Xi$ we have

$$\sum_{s'=s}^{l} \lambda_{jls'} \lambda'_{js's} = \sum_{s'=s}^{l} \lambda'_{jls'} \lambda_{js's}, \tag{22}$$

$$\sum_{l=s}^{r_j} \bar{\lambda}_{jls} h'_{jl} + A_1'^* h_{js} = \sum_{l=s}^{r_j} \bar{\lambda}'_{jls} h_{jl} + A_1^* h'_{js}, \tag{23}$$

$$\sum_{l=s}^{r_j} \bar{\lambda}_{jls} \pi'_{jl} + A_2'^* \pi_{js} = \sum_{l=s}^{r_j} \bar{\lambda}'_{jls} \pi_{jl} + A_2^* \pi'_{js}, \tag{24}$$

$$\sum_{l'=s}^{r_{j'}} \alpha_{jlj'l'} \lambda'^*_{j'l's} + \sum_{l'=l}^{r_j} \bar{\lambda}_{jl'l} \alpha'_{jl'j's} + (h_{jl}, h'^*_{j's}) + (\pi_{jl}, \pi'^*_{j's}) = \tag{25}$$

$$= \sum_{l'=s}^{r_{j'}} \alpha'_{jlj'l'} \lambda^*_{j'l's} + \sum_{l'=l}^{r_j} \lambda'_{jl'l} \alpha_{jl'j's} + (h'_{jl}, h^*_{j's}) + (\pi'_{jl}, \pi^*_{j's});$$

6. if $\xi, \xi' \in \Xi$ then also $\xi'' \in \Xi$, where

$$A_1'' = A_1 A_1', \quad A_2'' = A_2 A_2', \quad \lambda''_{jls} = \sum_{s'=s}^{l} \lambda_{jls'} \lambda'_{js's},$$

$$\alpha''_{jlj's} = \sum_{l'=s}^{r_{j'}} \alpha_{jlj'l'} \lambda'^*_{j'l's} + \sum_{l'=l}^{r_j} \bar{\lambda}_{jl'l} \alpha'_{jl'j's} + (h_{jl}, h'^*_{j's}) + (\pi_{jl}, \pi'^*_{j's}),$$

$$h''_{js} = \sum_{l=s}^{r_j} \bar{\lambda}_{jls} h'_{jl} + A_1'^* h_{js}, \quad \pi''_{js} = \sum_{l=s}^{r_j} \bar{\lambda}_{jls} \pi'_{jl} + A_2'^* \pi_{js}.$$

If we take all such systems Ξ we obtain by (18)—(21), up to equivalence, all possible commutative symmetric operator algebras in $\Pi_\varkappa$. Now suppose that B is separable in the operator norm. Then using one of these axioms namely (23) and the realization (11)—(12) of $\mathfrak{H}$ and B_1 a formula for $h_{jl}(A) = h_j(A, t)$ can be obtained. In order to write this formula we need some definitions. An eigenfunctional λ_j is called *singular* if a point $t_j \in T$ exists, such that $\lambda_j(A) = A(t_j)$ for all $A \in B$; t_j is then called *the corresponding singular point* of B. If no such point exists λ_j is called *regular*. The singular points are analogous to the spectral singularities of non selfadjoint operators (cf. [2—5]).

We put: $T_j = T - \{t_j\}$ if λ_j is a singular functional and $T_j = T$ otherwise, $K_j = \mathfrak{H}(t_j)$ if λ_j is singular and $\sigma(\{t_j\}) > 0$ and $K_j = (0)$ otherwise. K_j is a Hilbert space which we call *the singular space of B corresponding to λ_j*. Then we have

$$h_{jl}(A, t) = (\overline{A(t)} - \overline{\lambda_j(A)}) \zeta_{jl}(t) - \sum_{\mu=l+1}^{r_j} \overline{\lambda_{j\mu l}(A)} \zeta_{j\mu}(t) \quad \text{for } t \neq t_j \tag{26a}$$

$$h_{jl}(A, t_j) = k_{jl}(A) \in K_j \tag{26b}$$

where $\zeta_{jl}(t) \in \mathfrak{H}(t)$, $\zeta_{jl}(t)$ is a σ-measurable function of t such that the right hand side of (26a) belongs to $\mathfrak{H}$ for any $A_1 \in B_1$. Formula (19) can now be written as follows

$$(27) \qquad A\{h(t)\} = -\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{r_j}\left\{\int_{T_j}[h(t),\, h_{jl}(t)]\,d\sigma+[k,\, k_{jl}]\right\}x_{jl}+\{A(t)h(t)\}$$

where $h_{jl}(t)=h_{jl}(A, t)$ is given by (26a).

Equations (18), (27), (20), (21) with $\xi=\{\lambda_{jls}, \alpha_{jlj'l'}, h_{jl}, \pi_{jl}, A_1, A_2\}$ running over some Ξ satisfying 1—6 give the general model of all symmetric commutative separable algebras B in $\Pi_\varkappa$.

We remark that conditions can be given in order that two such models be equivalent [15].

We also remark that the above construction can be simplified if we take for $\mathfrak{Q}$ not the principal space, but any $\varkappa$-dimensional non-negative subspace, which is invariant with respect to all $A \in B$. Then the corresponding Π is finite dimensional and positive and the corresponding degenerate algebras are algebras of scalars. This modified construction can be used to describe degenerate algebras in $\Pi_\varkappa$ [16]. But this construction will depend on the choice of $\mathfrak{Q}$ and moreover it will be applicable to group representations for commutative groups only while the construction with the principal space for $\mathfrak{Q}$ is applicable to group representation of non-commutative groups as well.

For $\varkappa=1$ the above construction can be simplified ([17, 18]).

3. Let us now turn to group representations. Let $g \to U_g$ be a unitary representation of G in a separable $\Pi_\varkappa$. We denote by M the set of all bounded linear operators in $\Pi_\varkappa$ which commute with all $U_g, g \in G$ and by $\mathfrak{A}$ a maximal commutative subalgebra of M. As $\Pi_\varkappa$ is separable there exists a sequence $A^{(n)} \in \mathfrak{A}$ which is dense in $\mathfrak{A}$ in the strong operator topology. Let B be the symmetric subalgebra of $\mathfrak{A}$, closed with respect to the operator norm convergence, which is generated by the $A^{(n)}$ and 1. We apply to this B the above results. Let $H = \sum_{j=1}^{\sigma}\oplus(S_{\lambda_j} \dotplus S_{\mu_j})$ be the hyperbolic space of B. Then each S_{λ_j}, S_{μ_j} is invariant with respect to all U_g and the restrictions of the representation $g \to U_g$ to S_{λ_j} and S_{μ_j} are operatorly irreducible, finite dimensional representations, adjoint one to another. We recall that a representation $g \to V_g$ is called *operatorly irreducible*, if any bounded linear operator in the representation space, which commutes with all V_g, is a multiple of the identity operator. The orthogonal complement $H^\perp$ is also invariant with respect to all U_g and considering the representation on $H^\perp$ we may further assume that $H=(0)$. The principal space $\mathfrak{Q}$, the basic space $\mathfrak{M}$, and the basic nullspace $\mathfrak{N}$ of B are all invariant with respect to all $U_g, g \in G$. Let $\mathfrak{N}', \mathfrak{H}, \Pi, \{x_{jl}\}, \{y_{jl}\}, \mathfrak{H}(t), K_j, t_j, \zeta_{jl}(t)$ be introduced as before.

Then up to equivalence we may assume that $\mathfrak{H}=\int_T \mathfrak{H}(t)\,d\sigma$ and we have the following:

Theorem 2. *Let $g \to U_g$ be a unitary representation of G in a separable space $\Pi_\varkappa$ and let B be the corresponding commutative symmetric algebra in $\Pi_\varkappa$, constructed above. To the realization of B as a model there corresponds a realization of the repre-*

sentation $g \to U_g$ by the equations

$$U_g x_{jl} = \sum_{s=1}^{r_j} u_{jls}(g) x_{js}, \tag{28}$$

$$U_g\{h(t)\} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{r_j} (h, h_{jl}(g)) x_{jl} + \{U_g(t) h(t)\}, \tag{29}$$

$$U_g \pi = \sum_{j=1}^{q} \sum_{l=1}^{r_j} (\pi, \pi_{jl}(g)) x_{jl} + U_g^{[1]} \pi, \tag{30}$$

$$U_g y_{jl} = \sum_{j'=1}^{q} \sum_{l'=1}^{r_{j'}} \alpha_{jlj'l'}(g) x_{j'l'} + \sum_{l'=1}^{r_j} \overline{u_{jl'l}(g^{-1})} y_{jl} + h_{jl}(g^{-1}) + \pi_{jl}(g^{-1}), \tag{31}$$

where $g \to U_g(t)$ is an irreducible unitary representation of G in $\mathfrak{H}(t)$ for σ-almost every $t \in T$, $t \neq t_j$, σ-measurably depending on t, and $g \to U_g^{[1]}$ is a unitary representation of G in Π. $u_{jls}(g)$, $\alpha_{jlj'l'}(g)$, $h_{jl}(g)$, $\pi_{jl}(g)$ are continuous functions on G with values from C, C, $\mathfrak{H}$, Π, respectively; $h_{jl}(t) = U_{g^{-1}}(t)\zeta_{jl}(t) - \sum_{\mu}^{r_j}{}' \overline{u_{j\mu l}(g)} \zeta_{j\mu}(t)$ for $t \neq t_j$,

and
$$h_{jl}(t_j) = k_{jl}(g) \in K_j.$$

Remark. It is natural to expect, that for particular classes of groups more detailed results could be obtained. In this direction little is done and only representations of the 2×2 complex unimodular group $SL(2, C)$ (which is essentially the Lorentz group) were discussed (cf. [19]—[22]).

References

[1] M. A. Naĭmark, *Normed rings* (Groningen, 1964).

[2] В. Э. Лянце, Об одном обобщении понятия спектральной меры, *Матем. сборник*, **61 (103)** (1963), 80—120.

[3] В. Э. Лянце, О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора со спектральными особенностями, *Доклады АН СССР*, **149** (1963), 256—259.

[4] В. Э. Лянце, О дифференциальном операторе со спектральными особенностями. I, *Матем. сборник*, **64 (106)** (1964), 521—561.

[5] В. Э. Лянце, О дифференциальном операторов со спектральными особенностями. II, *Матем. сборник*, **65 (107)** (1964), 47—103.

[6] N. Dunford, A survey of the theory of the spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 217—274.

[7] М. А. Наймарк, О разложении по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, *Доклады АН СССР*, **89** (1953), 213—216.

[8] М. А. Наймарк, Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси, *Труды Моск. Матем. об-ва*, **3** (1954), 181—270.

[9] М. Г. Крейн и Г. К. Лангер, О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой, *Доклады АН СССР*, **152** (1963), 39—42.

[10] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)* (Paris, 1957).

[11] M. A. NAĬMARK, On commuting unitary operators in spaces with indefinite metric, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 177—189.
[12] И. С. Иохвидов—М. Г. Крейн, Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I, II, *Труды Моск. Матем. об-ва,* **5** (1956), 367—432; **8** (1959), 413—496.
[13] М. А. Наймарк, Об унитарных представлениях разрешимых групп в пространствах с индефинитной метрикой, *Известия АН СССР* (серия матем.), **27** (1963), 1181—1185.
[14] R. S. PHILLIPS, The extension of dual subspaces invariant under an algebra, *Proceedings Intern. Sympos. on Linear Spaces* (Jerusalem, 1960), 366—398.
[15] М. А. Наймарк, Об условиях унитарной эквивалентности коммутативных симметричных алгебр в пространствах Π_k, *Доклады АН СССР*, **160** (1965), 1257—1260.
[16] М. А. Наймарк, О коммутативных алгебрах операторов в пространстве Π_k, *Доклады АН СССР*, **161** (1965), 767—770.
[17] М. А. Наймарк, О коммутативных алгебрах операторов в пространстве Π_1, *Доклады АН СССР*, **156** (1964), 734—737.
[18] М. А. Наймарк, Коммутативные алгебры операторов в пространстве Π_1, *Revue roumaine des math. pures et appl.*, **9** (1964), 499—528.
[19] S. SCHLIEDER, Indefinite Metrik im Zustandsraum und Wahrscheinlichkeitsinterpretation. I—II, *Z. Naturforsch.*, **15**a (1960), 448—467.
[20] М. А. Наймарк, Об унитарных представлениях группы Лоренца в пространстве $\Pi_\varkappa$, *Доклады АН СССР*, **152** (1963), 1064—1067.
[21] М. А. Наймарк, Об унитарных представлениях группы Лоренца в пространстве с индефинитной метрикой, *Матем. сборник*, **65** (1948), 198—211.
[22] Р. С. Исмагилов, Описание унитарных представлений группы Лоренца в пространстве с индефинитной метрикой, *Доклады АН СССР*, **158** (1964), 268—270.

(Received September 26, 1964)

Einige Beiträge zur Approximationstheorie

Von G. ALEXITS in Budapest

Einleitung

Das allgemeine Approximationsproblem kann etwa folgenderweise gefaßt werden: Auf der Grundmenge G sei eine Funktionsklasse $\mathfrak{K}$ definiert und die Funktionen $f(x)$ aus $\mathfrak{K}$ gehören zu einem Banach-Raum B. Es sei ferner $\{\varphi_n(x)\}$ eine geordnete, abzählbare Menge von Funktionen auf G, die ebenfalls zu B gehören. Bildet man die Linearformen

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\varphi_k(x)$$

mit reellen Koeffizienten a_{nk}, so besteht das allgemeine Approximationsproblem darin, daß man die B-Normen $\|f-\Phi_n\|$ möglichst gut abschätzt und dadurch den „Annäherungsgrad" der Funktionen $f\in\mathfrak{K}$ mit den „Polynomen" $\Phi_n(x)$ im Raum B bestimmt.

Wir geben im § 1 notwendige und hinreichende Bedingungen an, damit eine Operatorenfolge $\{U_n(f)\}$ in einem Banach-Raum B die Elemente f von B bezüglich der B-Metrik in derselben Ordnung approximiert wie die mit den „Polynomen" $\{\Phi_n(x)\}$ erreichbare beste Approximation.

Im § 2 werden die Ergebnisse des § 1 auf die Approximation mit Orthogonalreihen-Mitteln angewendet. Wir werden ferner auch eine notwendige und hinreichende Bedingung für die beste Approximation im starken Sinn angeben. Der hinreichende Teil dieser Bedingung wurde schon von einigen Autoren — ohne die Kenntnis des allgemeinen Satzes — zum Beweis verschiedener Verschärfungen bekannter klassischer Approximationssätze verwendet.

Im § 3 wollen wir uns der Frage von Approximationen mit singulären Integralen in einzelnen Punkten zuwenden. Es wird sich die interessante Tatsache herausstellen, daß man scharf unterscheiden muß, ob es sich um die Approximation von Funktionen handelt, die gewisse Stetigkeitseigenschaften nur in einzelnen Punkten besitzen, oder aber dieselbe in ganzen Intervallen gleichmäßig erfüllen. Denn im ersten Fall hängt die Approximationsgeschwindigkeit nur von der Struktur des Kernes der sog. Lebesgueschen Konstanten ab, während im zweiten Fall die gleichmäßige Approximation im ganzen Intervall auch ohne das Erfülltsein dieser Strukturbedingung noch entsprechend gut sein kann.

§ 1. Allgemeines über die beste Approximation

1.1. Bezeichne G eine Menge, x ein Element von G; auf G seien Funktionen $f(x)$ definiert, die zu einem Banach-Raum B gehören. Bezeichne $\{\varphi_n(x)\}$ ein abzählbares, geordnetes System von linear unabhängigen Funktionen [1]), die ebenfalls zu B gehören, und sei Φ die Menge der Linearformen

$$\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{mk}\varphi_k(x)$$

mit reellen a_{mk}. Die Linearform $\Phi_m(x)$ heißt von höchstens n-ter Ordnung, wenn für $k>n$ alle a_{mk} verschwinden.

Wir definieren für jedes $f\in B$ und $n=0, 1, \ldots$ die nicht negativen Zahlen

$$E_n(f, \Phi; B) = \inf_{\Phi_n} \|f-\Phi_n\|,$$

wobei die Bildung des Infimums über alle $\Phi_n(x)$ höchstens n-ter Ordnung zu verstehen ist, und nennen $E_n(f, \Phi; B)$ die mit den Linearformen $\Phi_n \in \Phi$ höchstens n-ter Ordnung erreichbare *beste Approximation* der Funktion $f\in B$.

Bezeichne $\{U_n(f)\}$ eine Folge von linearen, beschränkten Operatoren, welche den Raum B in sich abbilden. $\{U_n(f)\}$ heißt *fast bestapproximierend bezüglich* Φ, wenn es eine von f und n unabhängige positive Konstante K gibt derart, daß für alle $f\in B$ die Abschätzung gilt:

$$\|f-U_n(f)\| \leqq K\cdot E_n(f, \Phi; B) \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Wir sagen ferner: der Operator $U_n(g)$ *reproduziert* die Funktion $g\in B$, wenn

$$\|g-U_n(g)\| = 0$$

ist.

Satz 1. *Ist Φ dicht in B, so ist $\{U_n(f)\}$ bezüglich Φ dann und nur dann fast bestapproximierend, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1° *Die Operatoren $U_m(\Phi_n)$ reproduzieren für $m\geqq n$ alle Linearformen $\Phi_n(x)$ höchstens n-ter Ordnung.*

2° *Die Normen $\|U_n\|$ sind in ihrer Gesamtheit beschränkt.*

Notwendigkeit. Wir bemerken zunächst, daß $E_n(\Phi_n, \Phi; B)=0$ und daher $E_m(\Phi_n, \Phi; B)=0$ für alle $m\geqq n$ ist. Daraus folgt wegen der Annahme, $\{U_n(f)\}$ sei fast bestapproximierend bezüglich Φ, die Beziehung $\|\Phi_n-U_m(\Phi_n)\| = 0$, d. h. $U_m(\Phi_n)$ reproduziert $\Phi_n(x)$ für alle $m\geqq n$ wie es in 1° verlangt wurde. — Was die Bedingung 2° anbetrifft, nehmen wir an, sie sei nicht erfüllt. Dann gibt es nach dem Banach—Steinhausschen Satz eine Funktion $f\in B$, für welche $\limsup \|U_n(f)\| = \infty$ gilt. Aus $\|f-U_n(f)\| \geqq \|U_n(f)\| - \|f\|$ ergibt sich somit $\limsup\|f-U_n(f)\| = \infty$. Das steht aber zur Eigenschaft, $\{U_n(f)\}$ sei fast bestapproximierend, in Widerspruch; denn Φ ist dicht in B, also gilt $E_n(f, \Phi; B)\to 0$ und mithin auch $\|f-U_n(f)\|\to 0$. Die Bedingung 2° ist also notwendig.

---

[1]) Die lineare Unabhängigkeit ist im Raum B zu verstehen, d. h. $\|c_1\varphi_{\nu_1}(x)+c_2\varphi_{\nu_2}(x)+ +\ldots+c_n\varphi_{\nu_n}(x)\| = 0$ gilt dann und nur dann, wenn alle $c_\nu=0$ sind.

Hinlänglichkeit. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so wählen wir bei festem n eine Linearform $\Phi_n(x)$ höchstens n-ter Ordnung derart, daß $\|f-\Phi_n\| \leqq E_n(f, \Phi; B)+\varepsilon$ ist. Wenn wir beachten, daß in der Dreiecksungleichung

$$\|f-U_n(f)\| \leqq \|f-\Phi_n\| + \|\Phi_n - U_n(\Phi_n)\| + \|U_n(\Phi_n) - U_n(f)\|$$

das mittlere Glied wegen 1° verschwindet, so folgt

$$\|f-U_n(f)\| \leqq E_n(f, \Phi; B)+\varepsilon+\|U_n(\Phi_n - f)\|.$$

Nach 2° gibt es ein $K_1 > 0$ derart, daß

$$\|U_n(\Phi_n - f)\| \leqq K_1 \cdot \|\Phi_n - f\| \leqq K_1 \cdot [E_n(f, \Phi; B)+\varepsilon]$$

ist. Da ε von n unabhängig und beliebig klein ist, gilt somit

$$\|f-U_n(f)\| \leqq (K_1+1)E_n(f, \Phi; B),$$

wie es behauptet wurde.

1.2. Wir betrachten nun lineare, beschränkte Operatoren $V_n(f)$, die B in sich abbilden und der Bedingung 1°, nicht aber der Bedingung 2° genügen. Wir nehmen jedoch an, daß diese Operatoren die Eigenschaft 1° in folgender verschärfter Form besitzen:

1* *Für jede Linearform* $\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\Phi_k(x)$ *gilt*

$$V_\nu(\Phi_n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_{nk}\varphi_k(x) \qquad (\nu=0, 1, \ldots, n, \ldots).$$

Um aus der nicht fast bestapproximierenden Folge $\{V_n(f)\}$ eine fast bestapproximierende Operatorenfolge zu bilden, sei $\mathfrak{T}$ ein Toeplitzsches lineares Summationsverfahren mit der zeilenfiniten, positiven Matrix

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \cdots & \alpha_{0N_0} & 0 \ldots \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N_1} & 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad (\alpha_{nk} \geqq 0,\ N_n \geqq n),$$

und bezeichne

$$t_n(f, V) = \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} V_k(f)$$

das n-te Mittel des Verfahrens $\mathfrak{T}$. Da $M(\alpha)$ zeilenfinit ist und die $V_k(f)$ lineare, beschränkte Operatoren sind, ist $t_n(f, V)$ ebenfalls ein linearer, beschränkter Operator.

Satz 2. *Ist Φ in B dicht und genügen die Operatoren $V_n(f)$ der Bedingung 1*, so ist, damit $\{t_n(f, V)\}$ in B fast bestapproximierend bezüglich Φ sei, notwendig und hinreichend, daß die Matrix $M(\alpha)$ den Bedingungen*

$$\alpha_{nk} = 0 \quad \text{für} \quad k < n, \tag{1}$$

$$\sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk} = 1 \tag{2}$$

genügt und die Normen $\|t_n\|$ in ihrer Gesamtheit beschränkt sind.

Notwendigkeit. Die von n unabhängige Beschränktheit der Normen $\|t_n\|$ folgt unmittelbar aus der Bedingung 2° des Satzes 1, welcher die Operatoren $t_n(f, V)$ zu genügen haben, da sie nach Annahme eine fast bestapproximierende Folge bilden. Um zu sehen, daß auch die Bedingungen (1) und (2) notwendig sind, betrachten wir die folgende Linearform genau n-ter Ordnung:

$$\Phi_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x).$$

Für diese gilt

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) - \left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \Phi_n^* \right\| \leqq$$

$$\leqq \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) + \Phi_n^* \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk} - t_n(\Phi_n^*, V) \right\| + \|t_n(\Phi_n^*, V) - \Phi_n^*\| \leqq$$

$$\leqq \left\| \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) - t_n(\Phi_n^*, V) \right\| + \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk} \|\Phi_n^* - V_k(\Phi_n^*)\| + \|t_n(\Phi_n^*, V) - \Phi_n^*\| =$$

$$= \|A_n\| + \|B_n\| + \|C_n\|.$$

Nach Definition ist $A_n \equiv 0$, also auch $\|A_n\| = 0$. Da $V_k(\Phi_n)$ nach Annahme für $k \geqq n$ die Linearform Φ_n in B reproduziert, ist $\|\Phi_n - V_k(\Phi_n)\| = 0$ und mithin $\|B_n\| = 0$. Da ferner $\{t_n(\Phi_n, V)\}$ fast bestapproximierend bezüglich Φ angenommen wurde, genügen die Operatoren $t_n(\Phi_n, V)$ der Bedingung 1° des Satzes 1, und daher ist auch $\|C_n\| = 0$. Wir sind somit zum folgenden Ergebnis gelangt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) - \left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \Phi_n^* \right\| = 0. \tag{3}$$

Wegen der Bedingung 1* ist $V_k(\Phi_n^*)$ eine Linearform höchstens k-ter Ordnung aus Φ, also

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} V_k(\Phi_n^*) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varphi_k(x).$$

Ferner gilt, wenn für $k < n$

$$c_k = 1 - \sum_{\nu=n}^{N_n} \alpha_{n\nu}$$

gesetzt wird,

$$\left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \Phi_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x) + \left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \varphi_n(x).$$

Aus (3) folgt somit

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - c_k) \varphi_k(x) - \left(1 - \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk}\right) \varphi_n(x) \right\| = 0,$$

was aber wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_\nu(x)$ nur dann möglich ist, wenn sämtliche Koeffizienten der auftretenden $\varphi_\nu(x)$ verschwinden. Es gilt also

$$1-\sum_{k=n}^{N_n}\alpha_{nk}=0,$$

womit die Notwendigkeit der Bedingung (2) bewiesen ist. Dann nimmt aber (3) die Gestalt an:

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{nk}V_k(\Phi_n^*)\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{n-1}b_k\varphi_k(x)\right\|=0. \tag{4}$$

Nach 1* ist $V_k(\Phi_n^*)=\sum_{\nu=0}^{k}\varphi_\nu(x)$, also

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{nk}V_k(\Phi_n^*)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x)\sum_{\nu=k}^{n-1}\alpha_{n\nu},$$

und demzufolge

$$b_k=\sum_{\nu=k}^{n-1}\alpha_{n\nu}.$$

Wegen (4) und der linearen Unabhängigkeit sind alle $b_k=0$, speziell auch

$$b_0=\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_{n\nu}=0,$$

und diese Beziehung ist wegen $\alpha_{nk}\geqq 0$ mit $\alpha_{n\nu}=0$ für $\nu<n$ gleichwertig, wie es eben in (1) verlangt wurde.

Hinlänglichkeit. Die Operatoren $t_n(f,V)=U_n(f)$ erfüllen nach Annahme die Bedingung 2° des Satzes 1. Außerdem gilt nach 1*, (1) und (2) für jede Linearform höchstens n-ter Ordnung $\Phi_n\in\Phi$ und $m\geqq n$

$$\|\Phi_n-t_m(\Phi_n,V)\|=\left\|\Phi_n-\Phi_n\sum_{k=n}^{N_n}\alpha_{nk}\right\|=0.$$

Die Bedingung 1° des Satzes 1 ist also ebenfalls erfüllt. Die Folge $\{t_n(f,V)\}$ ist somit fast bestapproximierend bezüglich Φ, wie wir es behauptet haben.

§ 2. Anwendung auf die Approximation mit Linearformen von Orthonormalfunktionen

2.1. Wir wählen als Grundmenge G ein lineares Intervall $[a,b]$, und verstehen unter $\{\varphi_n(x)\}$ ein Orthonormalsystem, für welches also

$$\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_l(x)\,d\mu(x)=\begin{cases}0 & (k\neq l),\\ 1 & (k=l)\end{cases}$$

gilt, wo $\mu(x)$ eine monoton nicht-abnehmende Funktion mit nicht fast überall verschwindender Ableitung bedeutet. Die Funktion $f(x)$ heißt L^p_μ-integrierbar, wenn sie μ-meßbar ist und das Lebesgue—Stieltjessche Integral

$$\int_a^b |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

existiert. Die n-te Teilsumme der Entwicklung

$$(5) \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad \left(c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\, d\mu(x)\right)$$

bezeichnen wir mit $s_n(f, x)$, wobei die Existenz der Entwicklungskoeffizienten c_n im Fall $1 \leqq p < 2$ natürlich eigens vorausgesetzt werden muß; in diesem Fall setzen wir also stets voraus, daß $\{\varphi_n(x)\}$ zum Gegenraum von L^p_μ gehört.

Satz 3. *Ist B ein Teilraum*[2]) *von L^p_μ, $\{\varphi_n(x)\}$ ein Orthonormalsystem und Φ dicht in B, so sind die Mittel*

$$t_n(f, x) = \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} V_k(f)$$

in B dann und nur dann fast bestapproximierend bezüglich Φ, wenn die Operatoren $V_k(f)$ die Teilsummen $s_k(f, x)$ der Entwicklung (5) *sind, die α_{nk} den Bedingungen* (1) *und* (2) *genügen und für die B-Normen von $t_n(f, x)$ die Beziehung*

$$\|t_n(f, x)\|_B \leqq K \cdot \|f(x)\|_B$$

für alle n besteht.

In einem Teilraum B von L^p_μ ist jede bezüglich der B-Metrik konvergente Folge auch bezüglich der L^p_μ-Metrik konvergent, Also gibt es zu jedem $f \in B$ eine Folge $\{\Phi_m(x)\}$ von Linearformen aus Φ, welche im Sinne der L^p_μ-Metrik gegen $f(x)$ stark konvergiert. Dann konvergiert $\{\Phi_m(x)\}$ auch schwach gegen $f(x)$, d. h. der ν-te Koeffizient $a_{m\nu}$ von $\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{mk}\varphi_k(x)$ konvergiert mit zunehmendem m gegen den ν-ten Entwicklungskoeffizient c_ν von $f(x)$. Nach der Eigenschaft 1* des Operators V_n gilt aber

$$V_n(\Phi_m) = \sum_{k=0}^{n} a_{mk}\varphi_k(x),$$

falls nur $m \geqq n$ ist. Für ein festes n ist der Operator V_n im Raum B stetig, also

$$V_n(f) = \lim_{m\to\infty} V_n(\Phi_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{mk}\varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x) = s_n(f, x).$$

Damit ist unsere erste Behauptung bewiesen. Alles übrige folgt unmittelbar aus dem Satz 2.

---

2) D. h. ist $f_n, f \in B$ und gilt für die B-Normen $\|f_n - f\|_B \to 0$, dann besteht auch $\|f_n - f\|_{L^p_\mu} \to 0$.

2.2. Aus dem soeben bewiesenen Satz ergibt sich das folgende Korollar:

Für die Orthogonalentwicklung (5) *gibt es außer höchstens der* $(C, 0)$*-Summation (Konvergenz im gewöhnlichen Sinn) kein Toeplitzsches Summationsverfahren* $\mathfrak{T}$ *mit positiver, dreieckiger Matrix* $M(\alpha)$, *dessen Mittel in* L^p_μ *fast bestapproximierend wären.*

Die Dreieckigkeit der Matrix $M(\alpha)$ bedeutet nämlich $\alpha_{nk}=0$ für $k>n$. Die Mittel $t_n(f, x)$ des Verfahrens $\mathfrak{T}$ sind mithin höchstens von der n-ten Ordnung; nach (1) und (2) könnte also nur $\alpha_{nn}=1$, sonst $\alpha_{nk}=0$ sein, was nach Satz 3 so viel bedeutet wie $t_n(f, x)=s_n(f, x)$.

Die Teilsummen $s_n(f, x)$ der Orthogonalentwicklung von $f(x)$ wären also ideale Annäherungsmittel, wenn die Beziehung $\|s_n(f, x)\| \leqq K\cdot\|f(x)\|$ für $n=0, 1, \ldots$ gelten würde. Das ist aber nur für sehr spezielle Orthogonalsysteme der Fall. Es wurde für das Haarsche Orthonormalsystem $\{\chi_n(x)\}$ in den Räumen $L^p(0, 1)$ mit $1\leqq p\leqq\infty$ bewiesen, wobei unter $L^\infty(0, 1)$ der Raum $C(0, 1)$ der in $[0, 1]$ stetigen Funktionen zu verstehen ist. Bezeichnet also X die Menge aller mit den $\chi_k(x)$ gebildeten Linearformen $\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\chi_k(x)$, so gilt

$$\|f(x)-s_n(f, x)\|_{L^p} \leqq K\cdot E(f, \mathrm{X};\, L^p) \qquad (1\leqq p\leqq\infty).$$

Eine Beziehung, die für $p=\infty$ von Sz.-Nagy [7], während für $1\leqq p<\infty$ später von Uljanov [8] in anderer Fassung bewiesen wurde.

Die Teilsummen der Haarschen Entwicklungen scheinen also zu Approximationszwecken besonders geeignet zu sein. Das sind sie aber doch nicht, wenn es sich um differenzierbare Funktionen handelt. Für diese würde man nämlich $o(n^{-1})$ als Annäherunsgrad der besten Approximation erwarten, dagegen hat Golubow [5] bewiesen, daß im Raum $C(0, 1)$ der stetigen Funktionen die Beziehung $E_n(f, \mathrm{X};\, C)=o(n^{-1})$ mit $f(x)\equiv$Konst. gleichwertig ist.

2.3. Wir werden nun die Frage der Approximation im starken Sinn untersuchen. Das Approximationsproblem im Raum $C(a, b)$ der in $[a, b]$ stetigen Funktionen wird nämlich wesentlich verschärft, wenn man statt den gewöhnlichen Differenzen

$$|f(x)-t_n(f, x)| = \left|\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}[f(x)-s_k(f, x)]\right|$$

das positive, nicht-lineare Funktional

$$T_n(f, x, p) = \left\{\sum_{k=0}^{N_n}\alpha_{nk}|f(x)-s_k(f, x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (\alpha_{nk}\geqq 0)$$

für ein $p\geqq 1$ betrachtet, und dann die Größenordnung von

$$T_n^*(f, p) = \max_{a\leqq x\leqq b} T_n(f, x, p)$$

untersucht. Wir sagen: Die Folge $\{t_n(f, x)\}$ ist *im starken Sinne fast bestapproximierend bezüglich* Φ, wenn

$$T_n^*(f, p) \leqq K\cdot E_n(f, \Phi;\, C)$$

mit einem von f und n unabhängigen K gilt.

Satz 4. *Sind die Funktionen des Orthonormalsystems* $\{\varphi_n(x)\}$ *stetig und* Φ *in C dicht, so ist* $\{t_n(f, x)\}$ *dann und nur dann im starken Sinne fast bestapproximierend bezüglich* Φ, *wenn die Bedingungen* (1) *und* (2) *erfüllt sind und außerdem*

$$\max_{a \leqq x \leqq b} \left\{\sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} |s_k(f, x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq K_2 \cdot \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| \tag{6}$$

mit einem von n unabhängigen K_2 *gilt.*

Notwendigkeit. Die Notwendigkeit der Bedingungen (1) und (2) folgt aus dem Satz 3, da die Eigenschaft, fast bestapproximierend im starken Sinne zu sein, die im gewöhnlichen Sinne nach sich zieht. Wir haben also nur noch die Notwendigkeit von (6) zu beweisen. Zunächst ist es ersichtlich, daß

$$\left\{\sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} |s_k(f, x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} (|f(x)| + |s_k(f, x) - f(x)|)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq 2^{\frac{p-1}{p}} \left\{\sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} |f(x)|^p + \sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} |s_k(f, x) - f(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq 2^{\frac{p-1}{p}} |f(x)| \left\{\sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk}\right\}^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{p-1}{p}} \left\{\sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} |s_k(f, x) - f(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

gilt. Daraus folgt nach (1), (2) und der Definition von $T_n^*(f, p)$:

$$\max_{a \leqq x \leqq b} \left\{\sum_{k=0}^{N_n} \alpha_{nk} |s_k(f, x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq 2^{\frac{p-1}{p}} \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| + 2^{\frac{p-1}{p}} T_n^*(f, p).$$

Die Beziehung (6) wird also bewiesen, wenn wir zeigen, daß es ein von n unabhängiges K_3 gibt, für welches

$$T_n^*(f, p) \leqq K_3 \cdot \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x)|$$

besteht. Nun ist zwar $T_n(f, x, p)$ kein additives, also auch kein lineares Funktional, es besitzt aber die folgenden Eigenschaften:

1. $T_n(f, x, p)$ ist stetig im Raum $C(a, b)$,
2. $T_n(f+g, x, p) \leqq T_n(f, x, p) + T_n(g, x, p)$,
3. $T_n(cf, x, p) = cT_n(f, x, p)$, wenn $c \geqq 0$.

Ein Blick auf den üblichen Beweis des Banach—Steinhausschen Satzes zeigt, daß dieser nicht nur für beschränkte, lineare Funktionale gilt, für welche er lediglich ausgesprochen wird, sondern für alle positiven Funktionale, welche die Eigenschaften 1, 2, 3 besitzen. Die Funktionale $T_n(f, x, p)$ können also wegen ihrer Eigenschaft, fast bestapproximierend zu sein, für ein $|f(x)| \leqq 1$ keine unendliche obere Grenze haben, daher besitzen ihre Normen $T_n^*(f, p)$ eine gemeinsame endliche Schranke K_3, was wir eben zu beweisen hatten.

Hinlänglichkeit. Der Beweis ist ganz kurz. Man wähle eine Folge $\{\Phi_n(x)\}$ aus Φ derart aus, daß

$$\max_{a \leqq x \leqq b} |f(x) - \Phi_n(x)| < E_n(f, \Phi; C) + \varepsilon$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ gilt. Bei Beachtung von (1), (2) und $s_k(\Phi_n, x) \equiv \Phi_n(x)$ für $k \geqq n$ ergibt sich dann

$$T_n^*(f, p) \leqq \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x) - \Phi_n(x)| + \max_{a \leqq x \leqq b} \left\{ \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{nk} |s_k(\Phi_n - f, x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

woraus nach (6) und der Beliebigkeit von ε die Beziehung

$$T_n^*(f, p) \leqq (1 + K_3) \cdot E_n(f, \Phi; C)$$

folgt, w. z. b. w.

Die neuesten Ergebnisse bezüglich der starken Approximation mit trigonometrischen oder algebraischen Polynomen (ALEXITS—KRÁLIK [1], [2], LEINDLER [6]) beruhen im wesentlichen auf dem hinreichenden Teil dieses Satzes. Das Entscheidende in diesen Arbeiten war nämlich stets der Schritt es zu zeigen, daß bei der in der betreffenden Arbeit getroffenen Wahl der Matrix $M(\alpha)$, die Beziehung (6) erfüllt ist.

§ 3. Approximation mit singulären Integralen

3.1. Wir wenden uns der folgenden Frage zu: Wie gestaltet sich die Approximation einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 des Intervalls $[a, b]$ mit einer Folge $\{I_n(f, x)\}$ von Integralen der Gestalt

$$I_n(f, x_0) = \int_a^b f(t) K_n(t, x_0)\, d\mu(t),$$

wenn die L_μ-integrierbare Funktion $f(x)$ nur in x_0 eine vorgeschriebene Stetigkeitseigenschaft hat?

Bezeichne zu diesem Zweck $\Omega(\delta)$ eine für $\delta \geqq 0$ definierte, stets wachsende, stetige Funktion mit $\Omega(0) = 0$ und $\Omega(b-a) \leqq 1$. Bezeichne ferner $\mathfrak{R}(\Omega, x_0)$ die Klasse aller L_μ-integrierbaren Funktionen, die in einer festen Umgebung $|x - x_0| \leqq \delta_0$ des Punktes x_0 beschränkt sind und in x_0 den lokalen Stetigkeitsmodul

$$\omega(\delta, f; x_0) = \sup_{0 < |x - x_0| \leqq \delta \leqq \delta_0} |f(x) - f(x_0)|$$

von der Größenordnung $\omega(\delta, f; x_0) \leqq M\Omega(\delta)$ haben.

Satz 5. *Existieren die Integrale $I_n(f, x_0)$ für alle L_μ-integrierbaren Funktionen und ist $f \in \mathfrak{R}(\Omega, x_0)$, so gilt die Abschätzung*

$$|f(x_0) - I_n(f, x_0)| \leqq K\Omega\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

nur dann, wenn die Funktion

$$k_n(t, x_0) = \frac{\Omega(|t - x_0|)}{\Omega(1/n)} K_n(t, x_0)$$

der Bedingung genügt:

$$\int_a^b |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t) \leqq K_4 \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{7}$$

Zum Beweis setze man einfachkeitshalber $[a, b]=[0, 1]$ und $x_0=0$. Wir machen aus der Funktionenmenge $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$ einen Banach-Raum, indem wir die Metrik

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, d\mu(x) + \sup_{0\leqq x\leqq \delta_0} |f(x)| + \sup_{0<x\leqq \delta_0} \frac{|f(x)-f(0)|}{\Omega(x)} \tag{8}$$

einführen. Es ist klar, daß hierdurch $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$ ein linearer, metrischer Raum geworden ist. Man sieht aber leicht, daß er auch vollständig, also ein Banach-Raum ist. Denn sei $\{f_n(x)\}$ eine Cauchysche Fundamentalfolge aus $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$. Nach (8) existiert die Grenzfunktion $f(x)$ in $[0, 1]$ fast überall, u. zw. ist sie wegen des ersten Gliedes rechts L_μ-integrierbar, wegen des zweiten in $[0, \delta_0]$ beschränkt und in $x_0=0$ stetig, ferner gilt wegen des dritten $\omega(\delta, f; 0)\leqq M\Omega(\delta)$; mithin gehört $f(x)$ zu $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$, das somit ein Banach-Raum ist.

Man betrachte nun die in $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$ definierten Funktionale

$$U_n(f) = \frac{I_n(f, 0)-f(0)}{\Omega(1/n)}.$$

Sie sind linear und einzeln beschränkt, da $I_n(f, 0)$ nach Annahme für alle L_μ-integrierbaren $f(x)$ existiert, weshalb bekanntlich

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\leqq t\leqq 1} |K_n(t, 0)| = M_n$$

endlich sein muß. [3]) Dann gilt

$$|U_n(f)| \leqq \frac{M_n}{\Omega(1/n)} \int_0^1 |f(t)|\, d\mu(t) + \frac{f(0)}{\Omega(1/n)},$$

aus welcher Abschätzung nach (8)

$$|U_n(f)| \leqq C_n \|f\|$$

folgt, wo C_n eine Konstante bedeutet. Die $U_n(f)$ sind also in $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$ definierte, lineare, beschränkte Funktionale.

Man setze nun

$$f_n(t) = \frac{1}{3} \min\left(1, 1\Big/\int_0^1 d\mu(t)\right)\cdot \Omega(t)\, \operatorname{sign} K_n(t, 0).$$

[3]) Die Bildung des vrai max $|K_n(t, 0)|$ ist bezüglich des μ-Maßes zu verstehen.

Die Funktionen $f_n(t)$ gehören zu $\mathfrak{K}(\Omega, 0)$, da sie μ-meßbar und beschränkt sind, ferner wegen $\Omega(0)=0$ den lokalen Stetigkeitsmodul

$$\omega(\delta, f; 0) \leqq \sup_{0 \leqq t \leqq \delta} \frac{1}{3} |\Omega(t) \operatorname{sign} K_n(t, 0)| = \frac{1}{3} \Omega(\delta)$$

haben. Außerdem gilt nach (8) wegen $\Omega(\delta) \leqq 1$:

$$\|f_n(t)\| \leqq \frac{1}{3} \min\left(1, 1\Big/\int_0^1 d\mu(t)\right) \cdot \int_0^1 \Omega(t)\, d\mu(t) + \frac{1}{3}\Omega(\delta) + \frac{1}{3}\frac{\Omega(\delta)}{\Omega(\delta)} \leqq 1.$$

Wir nehmen nun an, (7) sei nicht erfüllt, daß also

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |k_n(t, 0)|\, d\mu(t) = \infty$$

gilt, und leiten daraus einen Widerspruch her. Denn $\Omega(t)$ ist positiv, daher $\operatorname{sign} K_n(t, 0) = \operatorname{sign} k_n(t, 0)$, folglich gilt wegen $f_n(0)=0$

$$U_n(f_n) = \frac{1}{\Omega(1/n)} \int_0^1 f_n(t) K_n(t, 0)\, d\mu(t) =$$

$$= \frac{\min\left(1, 1\Big/\int_0^1 d\mu(t)\right)}{3\Omega(1/n)} \int_0^1 \Omega(t) \operatorname{sign} k_n(t, 0) \cdot \frac{\Omega(1/n) k_n(t, 0)}{\Omega(t)}\, d\mu(t) =$$

$$= \frac{\min\left(1, 1\Big/\int_0^1 d\mu(t)\right)}{3} \int_0^1 |k_n(t, 0)|\, d\mu(t),$$

und mithin

$$\limsup_{n\to\infty} |U_n(f_n)| = \infty.$$

Es gibt dann nach dem Banach—Steinhausschen Satz auch ein festes Element $f \in \mathfrak{K}(\Omega, 0)$ mit $\limsup |U_n(f)| = \infty$. Das bedeutet nach der Definition von $U_n(f)$ so viel wie

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|I_n(f, 0) - f(0)|}{\Omega(1/n)} = \infty.$$

Diese Beziehung steht aber zu unserer Annahme

$$\frac{|f(0) - I_n(f, 0)|}{\Omega(1/n)} \leqq K$$

in Widerspruch.

3.2. Der soeben bewiesene Satz bildet die Grundlage zur systematischen Untersuchung der Approximation mit singulären Integralen. Wir setzen voraus, daß $I_n(f, x_0)$ *konstantentreu* ist, worunter wir folgendes verstehen:

$$\int_a^b K_n(t, x_0)\, d\mu(t) = 1 \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Satz 6. *Sind die Integrale $I_n(f, x_0)$ konstantentreu und ist die μ-meßbare Funktion $f(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ beschränkt und in x_0 stetig mit einem lokalen Stetigkeitsmodul $\omega(\delta, f; x_0) \leqq M\Omega(\delta)$, so gilt*

$$|f(x_0) - I_n(f, x_0)| \leqq K\Omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

dann und nur dann, wenn die Kerne $K_n(t, x_0)$ der Integrale $I_n(f, x_0)$ so beschaffen sind, daß die Bedingung (7) erfüllt ist.

Die Notwendigkeit wurde soeben bewiesen, es bleibt noch zu zeigen, daß (7) auch hinreichend ist. Beachten wir hierzu, daß

$$|f(x_0) - I_n(f, x_0)| \leqq \left(\int_a^{x_0-\delta_0} + \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} + \int_{x_0+\delta_0}^{b}\right) |f(x_0) - f(t)|\, |K_n(t, x_0)|\, d\mu(t) \leqq$$

$$\leqq \Omega(1/n) \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \frac{|f(x_0) - f(t)|}{\Omega(|t - x_0|)} |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t) +$$

$$+ \frac{\Omega(1/n)}{\Omega(\delta_0)} \left(\int_a^{x_0-\delta_0} + \int_{x_0+\delta_0}^{b}\right) |f(x_0) - f(t)|\, |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t)$$

ist. Wegen der Beschränktheit von $f(t)$ gilt

$$|f(x_0) - f(t)| \leqq 2 \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| = 2\bar{M},$$

ferner besteht für $|t - x_0| \leqq \delta_0$ die Beziehung

$$|f(x_0) - f(t)| \leqq \omega\big(|t - x_0|, f; x_0\big) \leqq M\Omega\big(|t - x_0|\big).$$

Wir erhalten somit die Abschätzung

$$|f(x_0) - I_n(f, x_0)| \leqq M\Omega(1/n) \int_a^b |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t) + \frac{4\bar{M}}{\Omega(\delta_0)} \Omega(1/n) \int_a^b |k_n(t, x_0)|\, d\mu(t),$$

woraus wegen (7) die behauptete Beziehung

$$|f(x_0) - I_n(f, x_0)| \leqq K\Omega(1/n)$$

mit $K = K_4\big(M + 4\bar{M}/\Omega(\delta_0)\big)$ folgt.

3.3. Aus dem Beweis des hinreichenden Teiles stellt sich heraus, daß der Annäherungsgrad $K \cdot \Omega(1/n)$ im Teilintervall $[c, d]$ von $[a, b]$ gleichmäßig erreicht wird, wenn die im Satz 6 gestellten Bedingungen nicht nur für einen Punkt x_0, sondern für alle $x \in [c, d]$ gleichmäßig erfüllt sind, also gilt der folgende

Satz 7. *Sind die Integrale $I_n(f, x)$ für alle $x \in [c, d]$ konstantentreu und ist $f(x)$ in $[a, b]$ beschränkt und μ-meßbar, in $[c, d]$ stetig mit einem Stetigkeitsmodul*

$$\omega(\delta, f; c, d) = \sup_{\substack{0 \leqq |t-x| \leqq \delta \\ t, x \in [c, d]}} |f(t) - f(x)| \leqq M\Omega(1/n),$$

besteht ferner die Beziehung

$$\int_a^b |k_n(t, x)| \, d\mu(t) \leqq K_5$$

für alle $x \in [c, d]$, so gilt bei jedem $\varepsilon > 0$

$$\sup_{c+\varepsilon \leqq x \leqq d-\varepsilon} |f(x) - I_n(f, x)| \leqq K\Omega(1/n).$$

3.4. Es ist recht interessant, daß die Bedingungen des Satzes 7 für die gleichmäßige Approximation von der Größenordnung $\Omega(1/n)$ hinreichend, *nicht aber notwendig* sind, obwohl sie für die Approximation in einzelnen Punkten nach Satz 5 sowohl notwendig wie auch hinreichend sind. Diese Tatsache läßt sich an dem Beispiel der (C, β)-Mittel der Fourierreihe illustrieren. Die Kerne $K_n^\beta(t, x_0)$ der (C, β)-Mittel der Fourierreihe genügen nämlich für $0 < \beta \leqq 1$ den folgenden Bedingungen (vgl. ZYGMUND [9], S. 94):

$$|K_n^\beta(t, x_0)| \leqq K_6 n \qquad (0 \leqq |t - x_0| \leqq 1/n),$$

$$|K_n^\beta(t, x_0)| \leqq \frac{K_7}{n^\beta |t - x_0|^{1+\beta}} \qquad (1/n \leqq |t - x_0| \leqq \pi).$$

Wählt man $\Omega(\delta) = \delta^\alpha$ und $\omega(\delta, f; x_0) \leqq M\delta^\alpha$, d. h. genügt $f(x)$ in x_0 einer lokalen Lipschitzbedingung α-ter Ordnung, so ergeben sich für $k_n(t, x_0)$ die Abschätzungen

$$|k_n(t, x_0)| \leqq K_6 n^{1+\alpha} |t - x_0|^\alpha \qquad \left(0 \leqq |t - x_0| \leqq \frac{1}{n}\right),$$

$$|k_n(t, x_0)| \leqq \frac{K_7}{n^{\beta-\alpha} |t - x_0|^{1+\beta-\alpha}} \qquad \left(\frac{1}{n} \leqq |t - x_0| \leqq \pi\right).$$

Ist $0 < \alpha < \beta$, so folgt daraus

$$\int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} |k_n(t, x_0)| \, dt \leqq K_6 n^{1+\alpha} \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} |t - x_0|^\alpha \, dt \leqq 2K_6,$$

ferner

$$\left(\int_0^{x_0 - \frac{1}{n}} + \int_{x_0 + \frac{1}{n}}^{\pi} \right) |k_n(t, x_0)| \, dt \leqq \frac{K_7}{n^{\beta-\alpha}} \left(\int_0^{x_0 - \frac{1}{n}} + \int_{x_0 + \frac{1}{n}}^{\pi} \right) \frac{dt}{|t - x_0|^{1+\beta-\alpha}} \leqq K_8.$$

Die Bedingung (7) ist also erfüllt, daher approximieren die (C, β)-Mittel $\sigma_n^\beta(f, x)$ im Punkt x_0 laut Satz 6 mit der Geschwindigkeit

$$f(x_0)-\sigma_n^\beta(f, x_0) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Die Abschätzungen für $K_n^\beta(t, x_0)$ und mithin auch die für $k_n(t, x_0)$ lassen sich aber nicht wesentlich verbessern (vgl. ZYGMUND [9], S. 95), also gilt für $\beta \leqq \alpha$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^\pi |k_n(t, x_0)|\, dt = \infty.$$

Nach Satz 5 gibt es daher eine um x_0 beschränkte, integrierbare Funktion, die in x_0 einer lokalen Lipschitzbedingung α-ter Ordnung genügt, und für welche

$$\limsup_{n\to\infty} |f(x_0)-\sigma_n^\beta(f, x_0)| = \infty$$

gilt. Wenn aber $f(x)$ *im ganzen Intervall* $[0, 2\pi]$ *gleichmäßig einer Lipschitzbedingung* α*-ter Ordnung mit* $0<\alpha<1$ *genügt*, so gilt für jedes $\beta>0$, also auch für ein $\beta \leqq \alpha$, gleichmäßig die Beziehung

$$f(x)-\sigma_n^\beta(f, x) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

(FLETT [4]).

Der Grund dieser Erscheinung besteht darin, daß die Größenordnung der Lebesgueschen Konstanten für die Größenordnung der gleichmäßigen Approximation im ganzen Intervall nicht unbedingt ausschlaggebend ist. Diese Tatsache wurde für die Approximation mit Interpolationspolynomen von ERDŐS—TURÁN [3] ausdrücklich betont.

Schriftenverzeichnis

[1] G. ALEXITS—D. KRÁLIK, Über die Approximation mit starken de la Vallée—Poussinschen Mitteln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), 43—50.

[2] ——— Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 93—102.

[3] P. ERDŐS—P. TURÁN, On the role of the Lebesgue functions in the theory of the Lagrange interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 47—65.

[4] T. M. FLETT, On the degree of approximation to a function by the Cesàro means of its Fourier Series, *Quarterly J. Math.*, (2) **7** (1956), 81—95.

[5] B. I. GOLUBOW, *Iswestia Akad. Nauk SSSR.* (Im Erscheinen.)

[6] L. LEINDLER, Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), 255—262.

[7] B. SZ.-NAGY, Approximation properties of orthogonal expansions, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953—54), 31—37.

[8] P. L. ULJANOW, Über Reihen, die nach dem Haarschen System fortschreiten, *Math. Sbornik*, (3) **63** (1964), 356—391. (Russisch.)

[9] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*. Bd. I (Cambridge, 1959).

(Eingegangen am 4. November 1964)

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НОРМАМИ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

С. Б. СТЕЧКИН (Свердловск)

Пусть $I=(-\infty, \infty)$ или $I=[0, \infty)$, действительная функция $f(x)$ задана и ограничена на I и имеет n—1-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица. Положим

$$M_k(f) = \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)| \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

причем для $k=n$ последнее выражение понимается как верхняя грань производных чисел функции $f^{(n-1)}(x)$.

Неравенства вида

$$M_k(f) \leqq C_{n,k} M_0^{(n-k)/n}(f) M_n^{k/n}(f), \tag{1}$$

связывающие величины $M_0(f)$, $M_k(f)$ и $M_n(f)$, мы будем называть *неравенствами Колмогорова*. А. Н. Колмогоров [1] для случая $I=(-\infty, \infty)$ нашел наилучшее значение $C_{n,k}$ в этих неравенствах при всех n и k. В случае $I=[0, \infty)$ известные результаты (Картан, Горный) не являются окончательными. Для нескольких частных значений n и k наилучшие константы были известны и раньше.

Пусть, далее, $p \geqq 1$,

$$\|f\|_p = \left\{\int_I |f(x)|^p\, dx\right\}^{1/p}$$

и если в неравенстве фигурирует $\|f^{(n)}(x)\|$, то предполагается, что функция $f^{(n-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке $[a, b]\subset I$. Харди, Литтльвуд и Полиа [2] отмечают (без доказательства), что для любого $p\geqq 1$ справедливо неравенство

$$\|f'\|_{(p)} \leqq C_{2,1}(p) \|f\|_{(p)}^{1/2} \|f''\|_{(p)}^{1/2}. \tag{2}$$

Наилучшие значения $C_{2,1}(p)$ известны при $p=\infty, p=2$ и $p=1$ и сведены в таблицу, а аналог неравенства (1) для всех $p\geqq 1$ и всех натуральных n доказан Штейном [3].

f	$I=(-\infty, \infty)$	$I=[0, \infty)$	Авторы
$p=\infty, \quad \lVert f\rVert = \sup\limits_{x\in I} \lvert f(x)\rvert$			
f любого знака	$\sqrt{2}$	2	Ландау, Адамар
$f(x)\geqq 0$	1	$\sqrt{2}$	Оловянишников
$p=2, \quad \lVert f\rVert = \left\{\int\limits_I \lvert f(x)\rvert^2\, dx\right\}^{1/2}$			
f любого знака	1	$\sqrt{2}$	Харди, Литтльвуд и Полиа
$f(x)\geqq 0$	?	?	—
$p=1, \quad \lVert f\rVert = \int\limits_I \lvert f(x)\rvert\, dx$			
f любого знака	$\sqrt{2}$	?	Штейн
$f(x)\geqq 0$	1	$\sqrt{2}$	Новые случаи

Цель настоящей работы — перенести неравенства Колмогорова на абстрактные функции. Пусть K есть линейное нормированное пространство функций $f(x)$, заданных на I и принимающих значения в некотором (действительном или комплексном) банаховом пространстве H. Изучаются неравенства, связывающие нормы функции и ее производных для $f\in K$. При этом, если в некотором неравенстве фигурирует $f^{(n)}(x)$, то предполагается, что для $f(x)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом n-го порядка в интегральной форме.

Теорема. *Пусть для любого* t $\lVert f(x+t)\rVert = \lVert f(x)\rVert$ $(I=(-\infty, \infty))$, *или для любого* $h\geqq 0$ $\lVert f(x+h)\rVert \leqq \lVert f(x)\rVert$ $(I=[0, \infty))$. *Тогда*

$$\lVert f^{(k)}\rVert \leqq C_{n,k}\lVert f\rVert^{(n-k)/n}\lVert f^{(n)}\rVert^{k/n} \qquad (1\leqq k\leqq n-1). \tag{3}$$

При этом можно положить

$$C_{n,k} = (k+1)\left(\frac{n-1}{k}\right)^{k\ln n} \leqq n^{n-k}.$$

В частности, справедливы следующие неравенства:

$$\|f'\| \leqq \sqrt{2}\|f\|^{1/2}\|f''\|^{1/2} \quad \text{при} \quad I=(-\infty,\infty),$$

$$\|f'\| \leqq 2\|f\|^{1/2}\|f''\|^{1/2} \quad \text{при} \quad I=[0,\infty),$$

$$\|f'\| \leqq \frac{1}{2}\,3^{2/3}\|f\|^{2/3}\|f'''\|^{1/3} \quad \text{при} \quad I=(-\infty,\infty),$$

$$(*) \qquad \|f'\| \leqq \frac{1}{2}\,3^{5/3}\|f\|^{2/3}\|f'''\|^{1/3} \quad \text{при} \quad I=[0,\infty),$$

$$\|f''\| \leqq 3^{1/3}\|f\|^{1/3}\|f'''\|^{2/3} \quad \text{при} \quad I=(-\infty,\infty),$$

$$(*) \qquad \|f''\| \leqq 2.3^{1/3}\|f\|^{1/3}\|f'''\|^{2/3} \quad \text{при} \quad I=[0,\infty).$$

Если H есть действительная прямая и $f(x)\geqq 0$, то в правых частях этих неравенств f надо заменить на $f/2$. Неравенства, отмеченные $(*)$, представляются новыми. Константы в неравенствах для $n=2$ и $n=3$ являются наилучшими и достигаются, например, для классического случая, когда $\|f\|=\sup\limits_{x\in I}|f(x)|$.

Метод доказательства, которым я пользуюсь, отличен от метода А. Н. Колмогорова и основан на рассмотрении линейных неравенств, связывающих $\|f\|$, $\|f^{(k)}\|$ и $\|f^{(n)}\|$, и эквивалентных (3).

Лемма 1. *Пусть* $A>0$, $B>0$

$$C=n\left(\frac{A}{n-k}\right)^{(n-k)/n}\left(\frac{B}{k}\right)^{k/n}.$$

Тогда утверждения:

$$(4) \qquad \|f^{(k)}\| \leqq Ah^{-k}\|f\|+Bh^{n-k}\|f^{(n)}\| \quad \textit{для любого} \quad h>0$$

и

$$(5) \qquad \|f^{(k)}\| \leqq C\|f\|^{(n-k)/n}\|f^{(n)}\|^{k/n}$$

эквивалентны.

В самом деле, минимизируя неравенство (4) по h, получаем (5). С другой стороны, применяя к (5) неравенство Юнга, выводим (4).

Теперь задача сводится к доказательству неравенства вида (4). Для этого я пользуюсь аппроксимативными соображениями. Пусть $h>0$ и линейный оператор $S_h(f)$, отображающий K в K, приближает $f^{(k)}(x)$ и обладает следующими свойствами:

1. $$\|S_h(f)\| \leqq Ah^{-k}\|f\|,$$

2. $$\|f^{(k)}-S_h(f)\| \leqq Bh^{n-k}\|f^{(n)}\|.$$

Тогда

$$\|f^{(k)}\| \leqq \|S_h(f)\|+\|f^{(k)}-S_h(f)\| \leqq Ah^{-k}\|f\|+Bh^{n-k}\|f^{(n)}\|,$$

т. е. справедливо неравенство (4). Выбирая надлежащим образом оператор $S_h(f)$, получаем все сформулированные выше утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $I=[0, \infty)$ *и пространство* K *удовлетворяет условию: для любого* $h \geqq 0$

(6) $$\|f(x+h)\| \leqq \|f(x)\|.$$

Тогда

(7) $$\|f^{(n-1)}\| \leqq n\|f\|^{1/n}\|f^{(n)}\|^{(n-1)/n} \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Положим

$$S(f) = S_{n-1,h}(f) = h^{-n+1}\Delta_h f(x) = h^{-n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^k f(x+kh) =$$

$$= h^{-n+2}\int_0^h \ldots \int_0^h f^{(n-1)}(x+t_1+\ldots+t_{n-1})\,dt_1\ldots dt_{n-1} \qquad (h>0).$$

Используя условие (6), находим, что

$$\|S(f)\| \leqq h^{-n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\|f(x+kh)\| \leqq h^{-n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k\|f(x)\| = \left(\frac{2}{h}\right)^{n-1}\|f\|.$$

Далее, имеем

$$f^{(n-1)}(x)-S(f) = h^{-n+1}\int_0^h \ldots \int_0^h \{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x+t_1+\ldots+t_{n-1})\}\,dt_1\ldots dt_{n-1},$$

откуда по неравенству Минковского

(8) $$\|f^{(n-1)}-S(f)\| \leqq h^{-n+1}\int_0^h \ldots \int_0^h \|f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x+t_1+\ldots+t_{n-1})\|\,dt_1\ldots dt_{n-1}.$$

Но при $t \geqq 0$

$$f^{(n-1)}(x+t)-f^{(n-1)}(x) = \int_0^t f^{(n)}(x+u)\,du$$

и, в силу (6),

$$\|f^{(n-1)}(x+t)-f^{(n-1)}(x)\| \leqq \int_0^t \|f^{(n)}(x+u)\|\,du \leqq t\|f^{(n)}(x)\|.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (8) получаем:

$$\|f^{(n-1)}-S(f)\| \leqq h^{-n+1}\int_0^h \ldots \int_0^h (t_1+\ldots+t_{n-1})\,dt_1\ldots dt_{n-1}\|f^{(n)}\| =$$

$$= (n-1)h^{-n+1}\int_0^h \ldots \int_0^h t_1\,dt_1\ldots dt_{n-1}\|f^{(n)}\| = (n-1)\frac{h}{2}\|f^{(n)}\|.$$

Из этих оценок вытекает, что

$$\|f^{(n-1)}\| \leqq \left(\frac{2}{h}\right)^{n-1} \|f\| + (n-1)\frac{h}{2}\|f^{(n)}\|,$$

а отсюда, согласно лемме I, следует (7), и лемма 2 доказана.

Очевидно, эта лемма остается справедливой и в том случае, когда $I=(-\infty, \infty)$ и для всех t $\|f(x+t)\| = \|f(x)\|$.

Теперь для завершения доказательства теоремы остается провести индукцию.

Лемма 3. *Пусть* $M_k \geqq 0$ *и*

(9) $$M_{n-1} \leqq C_n M_0^{1/n} M_n^{(n-1)/n} \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Тогда

(10) $$M_k \leqq C_{n,k} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n} \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1;\ n=2, 3, \ldots),$$

где

(11) $$C_{n,k}^{1/k} = \prod_{p=k}^{n-1} C_{p+1}^{1/p}.$$

Для $n=2$ утверждения (9) и (10) совпадают. Пусть для некоторого $n \geqq 2$ уже установлено, что

(12) $$M_k \leqq C_{n,k} M_0^{(n-k)/n} M_n^{k/n},$$

где $C_{n,k}$ имеет вид (10). Используя неравенство (9) с заменой n на $n+1$ имеем:

$$M_n \leqq C_{n+1} M_0^{1/(n+1)} M_{n+1}^{n/(n+1)}.$$

Подставляя это неравенство в (12), получаем

$$M_k \leqq C_{n,k} C_{n+1}^{k/n} M_0^{(n+1-k)/(n+1)} M_{n+1}^{k/(n+1)}.$$

Таким образом, можно положить

$$C_{n+1,k} = C_{n,k} C_{n+1}^{k/n},$$

откуда

$$C_{n+1,k}^{1/k} = C_{n,k}^{1/k} C_{n+1}^{1/n} = \prod_{p=k}^{n-1} C_{p+1}^{1/p} C_{n+1}^{1/n} = \prod_{p=k}^{n} C_{p+1}^{1/p},$$

и лемма доказана.

В интересующем нас случае $C_n = n$. Поэтому в неравенстве (3) можно положить

$$C_{n,k} = \exp\left\{k \sum_{p=k}^{n-1} \frac{1}{p} \ln(p+1)\right\}.$$

Оценим это выражение. Имеем

$$\sum_{p=k}^{n-1}{}' \frac{1}{p}\ln(p+1) \leqq \frac{1}{k}\ln(k+1) + \sum_{p=k+1}^{n-1}{}' \frac{1}{p}\ln(p+1) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{k}\ln(k+1) + \ln\frac{n-1}{k}\ln n.$$

Отсюда

$$C_{n,k} \leqq \exp\left\{\ln(k+1) + k\ln\frac{n-1}{k}\ln n\right\} = (k+1)\left(\frac{n-1}{k}\right)^{k\ln n},$$

и теорема доказана.

В заключение заметим, что для доказательства неравенств ($*$) следует соответственно положить

$$S_h(f) = \frac{1}{6h}\{-8f(x)+9f(x+h)-f(x+3h)\} \qquad (k=1)$$

и

$$S_h(f) = \frac{1}{3h^2}\{2f(x)-3f(x+h)+f(x+3h)\} \qquad (k=2).$$

Эти формулы являются наилучшими формулами численного дифференцирования для $n=3$.

Литература

[1] А. Н. Колмогоров, О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале, *Ученые записки МГУ*, **30**, *Математика*, **3** (1939), 3—16.

[2] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд и Г. Полиа, *Неравенства* (Москва, 1948).

[3] E. M. Stein, Functions of exponential type, *Annals of Math.*, (2) **65** (1957), 582—592.

(Поступило 20. IX. 1964)

Über ein Problem von L. Rédei

Von KURT HAUSCHILD in Berlin und GYÖRGY POLLÁK in Szeged

Im folgenden wird ein angeordneter Körper konstruiert, in dem jede Folge aus positiven Gliedern eine obere Schranke und eine positive untere Schranke besitzt. Damit erledigt sich die Frage nach der Existenz eines derartigen Körpers, die L. Rédei in [1] gestellt hat.

Es sei Ω die Menge der Ordinalzahlen der zweiten Zahlklasse; kleine griechische Buchstaben mögen im folgenden immer Elemente von Ω bedeuten.

Es bezeichne R den Körper der rationalen Zahlen, $X=\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ eine Menge transzendenter Elemente der Mächtigkeit $\aleph_1$. Wir betrachten den Körper $R(X)$, der also rein transzendent vom Grade $\aleph_1$ über R ist. Wir führen in $R(X)$ eine Ordnung „<" so ein, daß $x_\alpha < x_\beta$ falls $\beta < \alpha$ und $x_\alpha < r$ ist ($\alpha, \beta \in \Omega$; $0 < r \in R$). Zu diesem Zweck sei erstens

$$(1)\quad x_{\alpha_1}^{k_1} x_{\alpha_2}^{k_2} \dots x_{\alpha_n}^{k_n} < x_{\alpha_1}^{l_1} x_{\alpha_2}^{l_2} \dots x_{\alpha_n}^{l_n} \qquad (\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n;\ l_i, k_i \geqq 0 \text{ für } i=1, \dots, n),$$

wenn

$$k_1 = l_1, \dots, k_{i-1} = l_{i-1},\ k_i > l_i$$

für ein i mit $1 \leqq i \leqq n$ gilt. Für ein Polynom f aus $R[x]$ sei $\max f$ das im Sinne der Ordnung (1) maximale Glied von f, dessen Koeffizient von 0 verschieden ist und bezeichne $r(f)$ diesen Koeffizienten. Nun definieren wir die Ordnung in $R(X)$ durch

$$(2)\qquad \frac{f}{g} > 0, \quad \text{falls} \quad \frac{r(f)}{r(g)} > 0 \text{ in } R.$$

Es ist klar, daß dabei die Relation (1) sowohl wie $x_\alpha < x_\beta$, $x_\alpha < r$ ($\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha > \beta$, $0 < r \in R$) erfüllt sind. Ferner, da

$$\max (f_1 + f_2) = \max (\max f_1, \max f_2), \qquad \max(f_1 f_2) = (\max f_1)(\max f_2)$$

für positive f_1, f_2 gilt und somit für diese auch

$$r(f_1+f_2) = \begin{cases} r(f_1), & \text{falls} \quad \max f_1 > \max f_2, \\ r(f_2), & \text{falls} \quad \max f_1 < \max f_2, \\ r(f_1)+r(f_2), & \text{falls} \quad \max f_1 = \max f_2, \end{cases} \qquad r(f_1 f_2) = r(f_1) r(f_2)$$

besteht, so sind die Summe und das Produkt zweier positiver Elemente aus $R(X)$ wieder positiv.

Ist jetzt $y_1, y_2, \ldots$ eine positivgliedrige Folge aus $\ddot{R}(X)$, so können in den y_i nur abzählbar unendlich viele verschiedene x_α vorkommen. Hiermit gibt es ein x_γ, das kleiner als alle vorkommenden x_α, also offensichtlich eine untere Schranke unserer Folge ist. Ebenso ist z. B. x_γ^{-1} eine obere Schranke. Damit ist bewiesen, daß $R(X)$ die gewünschte Eigenschaft hat. [1])

Literatur

[1] L. Rédei, *Algebra* I (Leipzig, 1959).

(Eingegangen am 31. August 1964)

[1]) Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn E. Fried fand er eine ähnliche Lösung des Problems.

Asymptotic values of entire functions of finite order with density conditions

By T. KŐVÁRI in London (England)

1. Introduction

Let

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} c_n z^{\lambda_n}$$

be an entire function of finite order ϱ, and let the sequence $\{\lambda_n\}$ satisfy the density condition:

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq p = \frac{1}{\Delta}. \tag{1. 1}$$

PÓLYA (1) has proved (under a somewhat less restrictive density-condition) [1]) the following result:

Theorem A. [1, Satz VII, p. 625] *If $f(z)$ is of mean-type, and $|f(z)|$ is bounded on the positive real axis, then*

$$\Delta \cdot \varrho \geqq \tfrac{1}{2}. \tag{1. 2}$$

Actually the assumption that $f(z)$ is of mean-type can be omitted [3, Theorem 1].

It seems very likely that if $|f(z)|$ is bounded on any curve joining 0 and ∞, conclusion (1. 2) still holds. However, we can only prove the following weaker result:

Theorem 1. *If Γ is a continuous curve without self-intersections joining* 0 *and* ∞, *and $|f(z)|$ is bounded on Γ, then*

$$\Delta \cdot \varrho \geqq \frac{1}{\pi^2}. \tag{1. 3}$$

Corollary. *If $\Delta \cdot \varrho < \frac{1}{\pi^2}$, $f(z)$ has no finite asymptotic value.*

---

1) In a recent paper [2], A. EDREI has replaced the Pólya density condition by a more precise one.

2. Statement and proof of Lemmas

We use the notations:

$$M(r) = \max_{0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi} |f(re^{i\vartheta})|; \quad M(r, \alpha, \beta) = \max_{\alpha \leqq \vartheta \leqq \beta} |f(re^{i\vartheta})|; \qquad \mu(r) = \max_n |c_n| r^n.$$

Lemma 1. *If the condition* (1. 1) *is satisfied, and if*

$$\beta - \alpha > 2\pi\Delta, \tag{2. 1}$$

then we have for entire functions of finite order, that

$$\log M(r, \alpha, \beta) \sim \log M(r). \tag{2. 2}$$

Proof. According to the Wiener—Ingham inequality [4],

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta < K(\alpha, \beta, \Delta) \cdot \int_\alpha^\beta |f(re^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta.$$

Thus

$$\mu^2(r) \leqq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta < K \int_\alpha^\beta |f(re^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta \leqq K(\beta - \alpha) M^2(r, \alpha, \beta),$$

$$\mu(r) \leqq K' M^2(r, \alpha, \beta), \quad \log \mu(r) \leqq C + \log M(r, \alpha, \beta). \tag{2. 3}$$

On the other hand it is well known [5, p. 34] that for entire functions of finite order:

$$\log \mu(r) \sim \log M(r). \tag{2. 4}$$

(2. 3), (2. 4), and the trivial inequality

$$M(r, \alpha, \beta) \leqq M(r)$$

immediately give (2. 2).

Lemma 2. *Let D_0 be the unit disc slit along the positive real axis, and let $\omega_0(z)$ be the harmonic measure of $0 \leqq x \leqq 1$ in D_0. Then*

$$\cot\left\{\frac{\pi}{2}\, \omega_0(re^{i\vartheta})\right\} = \frac{2\sqrt{r}}{1-r} \sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{2. 5}$$

Lemma 3. *Suppose that $m(R) = \max_{0 \leqq x \leqq R} |f(x)|$ and $\omega_0(z)$ is defined as in the previous lemma. Then we have:*

$$\log |f(re^{i\vartheta})| \leqq \omega_0\left(\frac{r}{R}\, e^{i\vartheta}\right) \log m(R) + \left\{1 - \omega_0\left(\frac{r}{R}\, e^{i\vartheta}\right)\right\} \log M(R). \tag{2. 6}$$

Lemma 4. *If $f(z)$ is of lower order ϱ and $\varrho' > \varrho$, then there is a sequence: $R_n \to \infty$ such that* [2])

$$R_n \left\{ \frac{d}{dr} \log M(r) \right\}_{r=R_n} \leqq \varrho' \log M(R_n). \tag{2.7}$$

Proof. Suppose that for $r \geqq r'$

$$r \left\{ \frac{d}{dr} \log M(r) \right\} > \varrho' \log M(r).$$

Then

$$\log\log M(r) - \log\log M(r') = \int_{x'}^{x} \frac{\frac{d}{dt}\log M(t)}{\log M(t)}\, dt > \varrho' \int_{x'}^{\pi} \frac{dt}{t} = \varrho' (\log r - \log r'),$$

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \geqq \varrho' > \varrho,$$

which is impossible.

3. Proof of Theorem 1

Suppose that $\{R_n\}$ is the sequence defined in Lemma 4 and that $R_n e^{i\alpha}$ is the first intersection of Γ and the circle $|z_n| = R_n$. Without loss of generality we can assume that $\alpha = 0$.

We have assumed that $f(z)$ is bounded on Γ, without loss of generality we can assume that $|f(z)| \leqq 1$ on Γ.

If $\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$ we find that $|f(z)\bar{f}(z)| \leqq M(R)$ on Γ and also on $\bar{\Gamma}$ which is the reflection of Γ into the real axis. The earlier intersections of Γ with the real axis partition $0 \leqq x \leqq R_n$ into a finite number of segments. (If there is no intersection, there is only one segment.) Each segment is the bisector of a domain bounded by an arc of Γ and an arc of $\bar{\Gamma}$. Hence, by the maximum principle we have:

$$|f(x)|^2 = |f(x)\bar{f}(x)| \leqq M(R),$$
$$m(R) = \max_{0 \leqq x \leqq R} |f(x)| \leqq \sqrt{M(R)}. \tag{3.1}$$

Since $r \dfrac{d}{dr} \log M(r) = \dfrac{d}{d\log r} \log M(r)$ is an increasing function of r, the application of Lemma 4 gives for $0 < h \leqq 1$:

$$\frac{\log M(R_n) - \log M(R_n e^{-h})}{h} \leqq R_n \left\{ \frac{d}{dr} \log M(r) \right\}_{x=R_n} \leqq \varrho' \log M(R_n).$$

[2]) The left-hand side of (2.7) may have isolated discontinuities but this does not affect the argument.

Hence, writing $r_n = R_n e^{-h}$, we have

$$\frac{\log M(r_n)}{\log M(R_n)} \geqq 1 - \varrho' h. \tag{3.2}$$

From (2. 6), (3. 1), and (3. 2) we obtain

$$\log |f(r_n e^{i\vartheta})| \leqq \left\{\frac{1}{2}\,\omega_0\left(\frac{r_n}{R_n}\,e^{i\vartheta}\right) + \left(1 - \omega_0\left(\frac{r_n}{R_n}\,e^{i\vartheta}\right)\right)\right\} \log M(R_n) =$$

$$= \left\{1 - \frac{1}{2}\,\omega_0(e^{-h} e^{i\vartheta})\right\} \log M(R_n) \leqq \left\{1 - \frac{1}{2}\,\omega_0(e^{-h} e^{i\vartheta})\right\} (1 - \varrho' h)^{-1} \log M(r_n).$$

In view of (2. 5), $\omega_0(e^{-h} e^{i\vartheta})$ is a decreasing function of ϑ for $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, and hence for $0 < \Delta' < 1$:

$$\log M(r_n, -\pi\Delta, +\pi\Delta') \leqq \left\{1 - \frac{1}{2}\,\omega_0(e^{-h} e^{i\pi\Delta'})\right\} (1 - \varrho' h)^{-1} \log M(r_n). \tag{3.3}$$

On the other hand, if $\varrho'' > \varrho'$ and $\Delta' > \Delta$, we obtain from Lemma 1, that for $n \geqq n_0$

$$\log M(r_n) \leqq \frac{1 - \varrho' h}{1 - \varrho'' h} \log M(r_n, -\pi\Delta', +\pi\Delta'). \tag{3.4}$$

From (3. 3) and (3. 4) we conclude that

$$\log M(r_n) \leqq \frac{1 - \frac{1}{2}\,\omega_0(e^{-h} e^{i\pi\Delta'})}{1 - \varrho'' h} \log M(r_n), \tag{3.5}$$

$$\omega_0(e^{-h} e^{i\pi\Delta'}) \leqq 2\varrho'' h.$$

Substituting the value of ω_0 from (2. 5) we obtain:

$$\cot(\pi\varrho'' h) \leqq \frac{2 \cdot e^{-h/2}}{1 - e^{-h}} \sin\frac{\pi}{2}\,\Delta', \tag{3.6}$$

$$\sin\frac{\pi}{2}\,\Delta' \geqq \frac{1}{2}\,(e^{h/2} - e^{-h/2}) \cot(\pi\varrho'' h) \geqq \frac{h}{2} \cot \pi\varrho'' h.$$

Since:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{2} \cot \pi\varrho'' h = \frac{1}{2\pi\varrho''}$$

we have that for $\varrho''' > \varrho''$ and $h < \varepsilon_0(\varrho'', \varrho''')$:

$$\frac{\pi}{2}\,\Delta' \geqq \sin\frac{\pi}{2}\,\Delta' \geqq \frac{1}{2\pi\varrho'''}, \qquad \varrho'''\Delta' \geqq \frac{1}{\pi^2}.$$

This is valid for every $\varrho''' > \varrho$, $\Delta' > \Delta$, hence:

$$\varrho \cdot \Delta \geqq \frac{1}{\pi^2}$$

which proves (1. 3).

References

[1] G. PÓLYA, Über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, *Math. Zeitschr.*, **29** (1929), 549–640.

[2] A. EDREI, Gap and density theorems for entire functions, *Scripta Math.*, **28** (1957), 1–25.

[3] T. KŐVÁRI, On the growth of entire functions of finite order with density conditions. *(To be published.)*

[4] A. E. INGHAM, Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, *Math. Zeitschr.*, **73** (1936), 367–379.

[5] G. VALIRON, *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, 1923).

(Received December 20, 1964)

Convergence of random products of contractions in Hilbert space

By I. AMEMIYA and T. ANDO in Sapporo (Japan)

1. Introduction

Given two projections P_1 and P_2 in a Hilbert space, it is known that a product $T_n \cdots T_2 T_1$ converges strongly as $n \to \infty$ where $T_j = P_1$ or $T_j = P_2$ at random. The problem in this paper is to observe the case of a finite number of projections. The result is that weak convergence is always valid, while strong convergence is still unsettled. After several comments on the convergence of the iterates of a single contraction, the convergence problem of random products will be discussed for a wider class of contractions, including all non-negative definite contractions.

2. Iterates

Let T be a contraction in a Hilbert space, i. e., a linear operator with $\|T\| \leqq 1$, then the so-called mean ergodic theorem shows that the average $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T^j$ converges strongly, as $n \to \infty$, to the projection onto the subspace of all vectors invariant under T, i. e., the null space of $I-T$, and that the orthogonal complement of the null space of $I-T$ coincides with the closure of its range (see [6], n° 143).

When do the iterates T^n themselves converge strongly or weakly? Since T operates as the identity on the null space of $I-T$, T^n converges if and only if $T^n f$ converges to 0 for all f in the range of $I-T$, so that T^n converges strongly or weakly according as $T^n(I-T)$ converges to 0 strongly or weakly.

Given f, $\|T^n f\|$ decreases monotonically with limit, say $\alpha \geqq 0$. If $\alpha = 0$, clearly $T^n(I-T)f \to 0$ strongly, and if $\alpha > 0$, with $g_n = \dfrac{T^n f}{\|T^n f\|}$, it follows $\|g_n\| = 1$, $T^n(I-T)f = \|T^n f\|(I-T)g_n$, and $\|Tg_n\| = \dfrac{\|T^{n+1} f\|}{\|T^n f\|} \to 1$. This observation leads to the following criterion.

T^n converges strongly or weakly, if T has the following property (S) *or* (W), *respectively:*

(S) $\quad \|f_n\| \leqq 1,\ \|Tf_n\| \to 1$ *imply* $(I-T)f_n \to 0$ *strongly,*

(W) $\quad \|f_n\| \leqq 1,\ \|Tf_n\| \to 1$ *imply* $(I-T)f_n \to 0$ *weakly.*

A non-negative definite contraction, in particular, a projection, has the property (S); in fact, if T is a non-negative definite contraction,

$$\|(I-T)f_n\|^2 = ((I-T)^2 f_n, f_n) \leqq$$
$$\leqq ((I-T)(I+T)f_n, f_n) = \|f_n\|^2 - \|Tf_n\|^2 \to 0$$

whenever $\|f_n\| \leqq 1$ and $\|Tf_n\| \to 1$.

The product of two (hence a finite number of) contractions, each of which has (S) or (W), also has the same property; in fact, if T_1, T_2 are contractions with the property, say (S), and if $\|f_n\| \leqq 1$ and $\|T_2 T_1 f_n\| \to 1$, then $\|T_1 f_n\| \leqq 1$ and $\|T_1 f_n\| \to 1$, so that

$$(I-T_2T_1)f_n = (I-T_1)f_n + (I-T_2)T_1 f_n \to 0$$

strongly. It should be mentioned that the statement about (S) was observed by HALPERIN [3] in proving the strong convergence of the iterates of a product of a finite number of projections.

The condition (W) has a simpler equivalent form (W′):

(W′) $\qquad \|Tf\| = \|f\|$ *implies* $Tf=f$.

Only the implication (W′)⇒(W) needs a proof. Since

$$\|f\|^2 - \|Tf\|^2 = ((I-T^*T)f, f)$$

and $I-T^*T$ is non-negative definite, $\|Tf\| = \|f\|$ is equivalent to $(I-T^*T)f=0$, so that (W′) implies that the null space of $I-T^*T$ is contained in that of $I-T$. By taking the orthogonal complements, it follows that the closure of the range of $I-T^*T$ contains the range of $I-T^*$. Now if $\|f_n\| \leqq 1$ and $\|Tf_n\| \to 1$, then

$$1 \geqq \|T^*Tf_n\| \geqq \|f_n\| \cdot \|T^*Tf_n\| \geqq (T^*Tf_n, f_n) = \|Tf_n\|^2 \to 1,$$

so that the property (S) for the non-negative definite contraction T^*T shows $(I-T^*T)f_n \to 0$ strongly, which, in turn, implies $(f_n, h) \to 0$ for all h in the closure of the range of $I-T^*T$. For an arbitrary g,

$$((I-T)f_n, g) = (f_n, (I-T^*)g) \to 0,$$

because $(I-T^*)g$ is in the closure of the range of $I-T^*T$. Thus (W′) implies (W).

Clearly (S) implies (W) and equivalently (W′). If a contraction T has (W′), its adjoint T^* has (W′) too. In fact, $\|T^*f\| = \|f\|$ implies $TT^*f=f$, so that

$$\|TT^*f\| = \|f\| = \|T^*f\|,$$

hence $TT^*f = T^*f$ by (W′) of T, and the assertion follows.

A contraction T is called *completely non-unitary* if $\|T^n f\| = \|T^{*n} f\| = \|f\|$ for all $n \geqq 0$ implies $f=0$. The decomposition theorem, proved idenpendently in [4] and [7], is quite useful in analysing an arbitrary contraction; it says that for a contraction T there is a uniquely determined closed linear subspace such that it reduces T and that T is unitary on it and is completely non-unitary on its orthogonal complement. Indeed, the subspace consists of all vectors f for which $\|T^n f\| = \|T^{*n} f\| = \|f\|$ for all $n \geqq 1$. Moreover SZ.-NAGY and FOIAŞ [7] proved that the spectral measure of the minimum unitary dilation of a completely non-unitary contraction is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on the unit circle. This result can give the following improvement of the criterion (W′) for the weak convergence of the iterates:

T^n converges weakly, if $\|T^n f\| = \|T^{*n} f\| = \|f\|$ for all $n \geqq 1$ implies $Tf = f$.

Here is an alternative proof, not using spectral representation (cf. [2]). The hypothesis means that the unitary part of T in the decomposition mentioned above acts as the identity, so that there is no loss of generality in assuming the complete non-unitarity of T, which is, as in the proof of the implication (W′)⇒(W), equivalent to the statement that the intersection of all null spaces of A_n $(n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ consists of 0 only, where $A_n = I - T^{*n}T^n$ and $A_{-n} = I - T^n T^{*n}$ for $n \geqq 0$. By taking orthogonal complement, the linear span of the union of all the ranges of A_n $(n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ is dense, so that to prove the weak convergence, it suffices to show that for all non-zero integer n and vectors f, g $(T^j f, A_n g) \to 0$ as $j \to \infty$. Since $\|T^j f\|$ decreases as j increases, it results for $n \geqq 1$

$$(T^j f, A_n T^j f) = \|T^j f\|^2 - \|T^{n+j} f\|^2 \to 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty,$$

so that the generalized Schwarz's inequality ([6], n° 104) for the scalar product induced by A_n yields

$$|(T^j f, A_n g)|^2 \leqq (T^j f, A_n T^j f) \cdot (g, A_n g) \leqq (T^j f, A_n T^j f) \cdot \|g\|^2 \to 0.$$

Since

$$A_{-n} T^j = T^n A_n T^{j-n} \quad \text{for} \quad j \geqq n \geqq 1,$$

the generalized Schwarz's inequality for the scalar product induced by A_{-n} yields

$$|(T^j f, A_{-n} g)|^4 \leqq (T^j f, A_{-n} T^j f)^2 \cdot (g, A_{-n} g)^2 \leqq$$
$$\leqq (T^j f, T^n A_n T^{j-n} f)^2 \cdot \|g\|^4 = (T^{*n} T^j f, A_n T^{j-n} f)^2 \|g\|^4 \leqq$$
$$\leqq (T^{j-n} f, A_n T^{j-n} f) \cdot (T^{*n} T^j f, A_n T^{*n} T^j f) \cdot \|g\|^4 \leqq$$
$$\leqq (T^{j-n} f, A_n T^{j-n} f) \cdot \|f\|^2 \cdot \|g\|^4 \to 0.$$

3. Random products

Let T_j $(j = 1, 2, \dots, N)$ be a finite set of contractions. A mapping $r(\cdot)$ from the set of all positive integers to $\{1, \dots, N\}$ will be called a *(random) selection.* Given a random selection $r(\cdot)$, construct the sequence of contractions $\{S_n\}$ by setting $S_n = T_{r(n)} \cdots T_{r(2)} \cdot T_{r(1)}$, then what can be said about the convergence of S_n or of the average $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} S_j$? The random ergodic theorem (cf. [1]) shows that if each selection is considered as a point of the infinite product of the copies of the probability space $\{1, 2, \dots, N\}$ (on which each point has the same probability N^{-1}), then the average $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} S_j$ converges strongly for almost all selections. Without any further restriction on the T_j's this would be the best result.

Suppose now that each T_j $(j = 1, 2, \dots, N)$ has (S). If a selection $r(\cdot)$ is *periodic,* i. e., $r(k+m) = r(k)$ for some m and all k, then $S_{mk} = (S_m)^k$, and since S_m has (S),

S_{mk} converges strongly, as $k \to \infty$, to the projection onto the null space of $I - S_m$. For an index n, take k such that $m(k-1) < n \leqq mk$, then

$$S_n = S_{n-m(k-1)} S_{m(k-1)}$$

where it is assumed that $S_0 = I$. If f is in the null space of $I - S_m$,

$$\|f\| = \|S_{m(k-1)} f\| \geqq \|S_n f\| \geqq \|S_{mk} f\| = \|f\|,$$

so that $S_n f = f$ because of (W′) for S_n, and if f is in the closure of the range of $I - S_m$,

$$\|S_n f\| \leqq \|S_{m(k-1)} f\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

because $k \to \infty$ as $n \to \infty$. Thus S_n converges strongly.

When every T_j is a projection, PRAGER [5] derived the weak convergence of S_n from a *quasi-periodicity* assumption on the selection $r(\cdot)$; S_n converges weakly, if there is m such that every m consecutive $r(k), r(k+1), \ldots, r(k+m-1)$ contains each j at least once $(j = 1, 2, \ldots, N)$. On starting with an observation that in his proof the hypothesis that T_j is a projection is not essential, but only the property (W) is necessary, the goal of this paper is to derive the weak convergence from (W) without any periodicity assumption on a selection. It should be mentioned that when the Hilbert space is of finite dimension, PRAGER attained the same goal in the case of projections; he proved the strong convergence, but strong convergence is equivalent to the weak one in the finite dimensional case.

Theorem. *If T_j is a contraction with* (W) *or equivalently* (W′) $(j = 1, 2, \ldots, N)$, *then for any random selection $r(\cdot)$ the sequence*

$$S_n = T_{r(n)} \cdots T_{r(2)} T_{r(1)}$$

converges weakly as $n \to \infty$.

The proof will be divided into several steps.

(i) In what follows, by a weak neighborhood there is meant a convex symmetric neighborhood of 0 with respect to the weak topology. The condition (W) can be stated in the following form: for any weak neighborhood $\mathfrak{V}$ there is an $\varepsilon > 0$ such that $\|f\| \leqq 1$, $\|T_j f\| \geqq 1 - \varepsilon$ imply $(I - T_j) f \in \mathfrak{V}$.

(ii) The intersection of the null spaces of $I - T_k$ $(k = 1, 2, \ldots, j)$ coincides with the null space of $I - T_j \ldots T_2 T_1$. In fact, the former is obviously contained in the latter. If f is in the latter,

$$\|f\| = \|T_n \cdots T_2 T_1 f\| \leqq \|T_1 f\| \leqq \|f\|$$

so that $T_1 f = f$ by (W′) of T_1 and by induction $T_k f = f$ $(k = 1, 2, \ldots, j)$. Let Q_j stand for the projection onto the null space of $I - T_j \ldots T_2 T_1$, then $T_k Q_j = Q_j$ $(k = 1, 2, \ldots, j)$ so that $T_k^* Q_j = Q_j$ because a vector invariant under a contraction is also invariant under its adjoint (cf. [6], n° 143). Thus from $T_k Q_j = Q_j$ and $T_k^* Q_j = Q_j$, the commutativity of Q_j with T_k $(k = 1, 2, \ldots, j)$ follows.

(iii) Let $P_j = I - Q_j$, then for any weak neighborhood $\mathfrak{V}$, there is another $\mathfrak{W}$ such that $\|f\| \leqq 1$, $(I - T_k) f \in \mathfrak{W}$ $(k = 1, 2, \ldots, j)$ imply $P_j f \in \mathfrak{V}$. In fact, since $(I - T_k) f = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, j)$ is equivalent to $P_j f = 0$ by (ii), the mapping which assigns to $P_j f$ the ordered j-tuple $\{(I - T_1) f, \ldots, (I - T_j) f\}$ is one-to-one. Since $(I - T_k) f = (I - T_k) P_j f$ $(k = 1, 2, \ldots, j)$ by (ii), it is continuous from the image of the unit ball under P_j into the product of j copies of the Hilbert space, when they are provided with their respective weak topologies. Since the domain is compact, the mapping is bi-continuous and the assertion is just the statement that the inverse mapping is continuous at the origin.

(iv) Let $\mathfrak{M}_j$ be the collection of contractions which are in a multiplicative semi-group with unit generated by j of the contractions $\{T_k\}_1^N$ $(j=1, 2, \ldots, N)$ and let $\mathfrak{M}_0=\{I\}$. Given a weak neighborhood $\mathfrak{V}$ and $S\in\mathfrak{M}_j$, there is a positive number $\varepsilon=\varepsilon(\mathfrak{V}, j)$ depending only on $\mathfrak{V}$ and j such that $\|f\|\leqq 1$, $\|Sf\|\geqq 1-\varepsilon$ implies $(I-S)f\in\mathfrak{V}$. Proof proceeds by induction on j as follows. The assertion for $j=0$ is trivial. Suppose that the assertion is true up to $j-1$. Only S in $\mathfrak{M}_j$ but not in $\mathfrak{M}_{j-1}$ needs consideration. There is no loss of generality in assuming that S is in the multiplicative semi-group generated by $T_1, T_2, \ldots, T_j$. For any index $1\leqq k\leqq j$, S can be written in the form

$$S=R_1T_kR_2=R_3T_kR_4$$

where R_1, R_4 are in $\mathfrak{M}_{j-1}$. Given a weak neighborhood $\mathfrak{V}$, take $\mathfrak{W}$ which is in relation of (iii) to $\mathfrak{V}$, and choose a weak neighborhood $\mathfrak{U}$ such that

$$4\mathfrak{U}+4T_i\mathfrak{U}\subseteqq\mathfrak{W} \qquad (i=1, \ldots, j),$$

which is possible because of the weak continuity of T_i. Now by the inductive assumption and (i) it is possible to take a positive number ε, independent of S, such that $\|g\|\leqq 1$, $\|Rg\|\geqq 1-\varepsilon$ with $R\in\mathfrak{M}_{j-1}$ or $R=T_k$ imply $(I-R)g\in\mathfrak{U}$. Now if $\|f\|\leqq 1$ and $\|Sf\|\geqq 1-\varepsilon$, obviously $1\geqq\|R_4f\|\geqq 1-\varepsilon$ and $\|T_kR_4f\|\geqq 1-\varepsilon$, hence $(I-R_4)f\in\mathfrak{U}$ and $(I-T_k)R_4f\in\mathfrak{U}$, so that

$$(I-T_k)f=(I-R_4)f+(I-T_k)R_4f-T_k(I-R_4)f\in 2\mathfrak{U}+T_k\mathfrak{U}\subseteqq\tfrac{1}{2}\mathfrak{W}$$

and quite similarly

$$(I-T_k)Sf=(R_1-I)T_kR_2f+T_k(I-R_1)T_kR_2f+T_k(I-T_k)R_2f\in\mathfrak{U}+2T_k\mathfrak{U}\subseteqq\tfrac{1}{2}\mathfrak{W}.$$

Since the relation is valid for $k=1, 2, \ldots, j$, (iii) guarantees $P_jf\in\frac{1}{2}\mathfrak{V}$ and $P_jSf\in\frac{1}{2}\mathfrak{V}$, consequently $P_j(I-S)f\in\mathfrak{V}$. As in (ii), $I-P_j$ is just the projection onto the null space of $I-S$, because S has T_k as a factor $(k=1, 2, \ldots, j)$, so that

$$(I-S)f=(I-S)P_jf=P_j(I-S)f\in\mathfrak{V}.$$

(v) S_nf converges weakly for all f. In fact, if $\|S_nf\|\to 0$, the assertion is trivial. If $\inf_n\|S_nf\|>0$, given a weak neighborhood $\mathfrak{V}$, take $\varepsilon=\varepsilon(\mathfrak{V}, N)$ in (iv), then for sufficiently large $n\geqq m$ we have $\|S_nf\|\geqq(1-\varepsilon)\|S_mf\|$. Since $S_n=S\cdot S_m$ for some $S\in\mathfrak{M}_N$ and

$$\|Sg\|=\frac{\|S_nf\|}{\|S_mf\|}\geqq 1-\varepsilon \quad\text{with}\quad g=\frac{S_mf}{\|S_mf\|},$$

(iv) guarantees $(I-S)g\in\mathfrak{V}$, so that

$$S_mf-S_nf=\|S_mf\|(I-S)g\in\|f\|\mathfrak{V}.$$

The weak convergence follows from the arbitrariness of $\mathfrak{V}$. This completes the proof.

*

When every index j appears infinitely many times in a selection $r(\cdot)$, the limit of the sequence S_n is the projection onto the subspace of vectors invariant under all T_j $(j=1, 2, \ldots, N)$. In fact, with the notations in the proof of the Theorem, for sufficiently large m $S_m Q_N = Q_N$, and if $f = P_N f$ and $\inf_n \|S_n f\| > 0$, for any weak neighborhood $\mathfrak{V}$ and sufficiently large m there is $n > m$ such that $r(m+1), \ldots, r(n)$ contains every j at least once $(j=1, 2, \ldots, N)$ and $\frac{\|S_n f\|}{\|S_m f\|} \geqq 1-\varepsilon$ where $\varepsilon = \varepsilon(\mathfrak{V}, N)$, so that as in (iv) and (v) $P_N\left(\frac{S_m f}{\|S_m f\|}\right) \in \mathfrak{V}$, hence

$$S_m f = S_m P_N f = P_N S_m f \in \|f\| \mathfrak{V}.$$

The arbitrariness of $\mathfrak{V}$ implies the weak convergence of $S_n P_N$ to 0. Thus S_n converges weakly to Q_N.

*

Corollary. *If T_j is a contraction with* (W) *or equivalently* (W') $(j=1, 2, \ldots, N)$, *then for any random selection $r(\cdot)$ the sequence*

$$S_n = T_{r(1)} T_{r(2)} \ldots T_{r(n)}$$

converges weakly as $n \to \infty$.

Proof. It is proved in § 2 that T_j^* has (W) $(j=1, 2, \ldots, N)$, so that by the Theorem, the product $T_{r(n)}^* \ldots T_{r(2)}^* T_{r(1)}^*$ converges weakly, hence $(S_n f, g) = (f, T_{r(n)}^* \ldots T_{r(2)}^* T_{r(1)}^* g)$ converges for all f, g.

This completes the proof.

References

[1] A. Beck and J. T. Schwartz, A vector valued random ergodic theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 1049–1059.
[2] R. S. Foguel, Powers of a contraction in Hilbert space, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 551–562.
[3] I. Halperin, The product of projection operators, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 96–99.
[4] H. Langer, Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, *Acta Math. Acad. Hungar.*, **12** (1961), 441–445.
[5] M. Prager, On a principle of convergence in a Hilbert space, *Czech. Math. J.*, **10** (1960), 271–282.
[6] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Budapest, 1952).
[7] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251–259.

(Received November 6, 1964)

Über die Unverschärfbarkeit eines Satzes von Orlicz bezüglich vollständige Systeme

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

OLEVSKIJ [1] hat kürzlich u. a. gezeigt, daß *es ein orthonormiertes System von Funktionen* $\theta_n(x) \in L^\infty[0, 1]$ *gibt, welches* $L[0, 1]$-*vollständig ist* [1]) *und für welches*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\theta_n(x)|^{2+\varepsilon} < \infty$$

in [0, 1] *überall gilt.*

Damit hat er in gewissem Sinne die Unverschärfbarkeit des folgenden Satzes von ORLICZ [2] bewiesen:

Ist $\{\varphi_n(x)\}$ *ein beliebiges* $L^2[0, 1]$-*vollständiges orthonormiertes System, so ist* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(x) = \infty$ *fast überall.*

In diesem Aufsatz beweisen wir zwei weitere Sätze bezüglich der Unverschärfbarkeit des Orliczschen Satzes.

Satz I. *Sei* $\{\varepsilon_k\}$ *eine beliebige positive Zahlenfolge mit* $\varepsilon_k \log k \to \infty$ $(\varepsilon_k \leqq 1)$. *Dann gibt es ein* $L[0, 1]$-*vollständiges orthonormiertes System* $\{\psi_n(x)\}$ *derart, daß*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)|^{2+\varepsilon_n} < \infty \tag{1}$$

in [0, 1] *überall besteht.*

Es ist so klar, daß *es eine Folge* $\{\varepsilon_k\}$ *mit* $\varepsilon_k \to 0$ *gibt, für die* (1) *gilt.*

Satz II. *Sei* $\{\lambda_n\}$ *eine beliebige positive Zahlenfolge mit* $\lambda_n \to \infty$. *Dann gibt es ein* $L[0, 1]$-*vollständiges orthonormiertes System* $\{\varphi_n(x)\}$ *derart, daß*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\Phi_n(x)|^2 < \infty \tag{2}$$

in [0, 1] *überall gilt.*

---

[1]) Ein System von Funktionen $\varphi_n(x) \in L^p(E)$ $(1 < p \leqq \infty)$ heißt $L^q(E)$-vollständig $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$, falls es keine nicht fast überall verschwindende Funktion $f(x) \in L^q(E)$ gibt, für die $\int_E f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$ für jedes n gilt.

Zum Beweis unserer Sätze benutzen wir das folgende wichtige Lemma von OLEVSKIJ [1]:

Seien E_j $(j=1, 2, \ldots)$ paarweise disjunkte meßbare Mengen positiven Maßes und es sei $\{\psi_k^{(j)}(x)\}$ ein $L^p(E_j)$-vollständiges $(1 \leqq p < \infty)$ Orthonormalsystem mit $|\psi_k^{(j)}(x)| \leqq M_{kj}$ für $x \in E_j$. Sei ferner $A_n = \|a_{r,j}^n\|$ eine orthogonale Matrix von l_n-ter Ordnung $(l_{n+1} \geqq l_n,\ l_n \to \infty)$. Wir setzen $\alpha_k = \sum_{n=0}^{k} l_n$ $(l_0 = 0)$ und

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} a^{(n_i)}_{i-\alpha_{n_i}-1,\,j}\,\psi^{(j)}_{n_i-m_j}(x) & \text{für} \quad x \in E_j,\ 1 \leqq j \leqq l_{n_i}, \\ 0 & \text{für} \quad x \in E_j,\ j > l_{n_i}, \end{cases} \tag{3}$$

wobei n_i und m_j durch die Ungleichungen $\alpha_{n_i-1} < i \leqq \alpha_{n_i}$, $l_{m_j} < j \leqq l_{m_j+1}$ bestimmt werden. Sei $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Die Funktionen $\varphi_i(x)$ bilden ein $L^p(E)$-vollständiges orthonormiertes System.

Beweis von Satz I. Da $\varepsilon_k \log k \to \infty$ ist, so kann eine Indexfolge $\{m_n\}$ $((1 \leqq) m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots)$ derart angegeben werden, daß für $k \geqq 2^{m_n}$ die Ungleichung $k^{\varepsilon_k} \geqq 2^{2(n+2)}$ gilt. Wir setzen

$$B_0 = \|1\|, \quad B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

und für $n \geqq 2$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} B_{n-1} & B_{n-1} \\ -B_{n-1} & B_{n-1} \end{Vmatrix}.$$

Es ist klar, daß die Matrizen B_n von 2^n-ter Ordnung orthogonal sind. Sei $E_j = \left[1 - \frac{1}{2^{j-1}},\ 1 - \frac{1}{2^j}\right)$ $(j=1, 2, \ldots)$. Es ist offenbar, daß für jedes j ein $L(E_j)$-vollständiges, gleichmäßig beschränktes, orthonormiertes Funktionensystem $\{\psi_k^{(j)}(x)\}$ $(|\psi_k^{(j)}(x)| \leqq M_j,\ M_j \geqq 1)$ angegeben werden kann. Wir setzen $A_n = B_{m_n}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Wir können auf die Mengen E_j, die Funktionensysteme $\{\psi_k^{(j)}(x)\}$ und die Matrizen A_n das Lemma anwenden. Die in diesem Fall durch (3) definierten Funktionen $\psi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots)$ sind nach dem Lemma orthogonal und $L[0, 1]$-vollständig. Sei ferner jede $\psi_i(1) = 0$. Wir zeigen noch, daß auch die Ungleichung (1) für die $\psi_i(x)$ erfüllt ist. Ist $x \in [0, 1)$, so gibt es ein Index $j = j(x)$ mit $x \in E_{j(x)}$. Dann ist $\left(l_n = 2^{m_n},\ \alpha_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{m_k} \text{ und } |a_{r,j}^{(n)}| = 2^{-\frac{m_n}{2}}\right)$

$$\sum_{i=\alpha_{n_1}+1}^{\infty} |\psi_i(x)|^{2+\varepsilon_i} = \sum_{n=m_j+1}^{\infty} \sum_{i=\alpha_{n-1}+1}^{\alpha_n} \left(\frac{1}{\sqrt{2^{m_n}}} |\psi^{(j)}_{n-m_j}(x)| \right)^{2+\varepsilon_i} \leqq$$

$$\leqq M_j^3 \sum_{n=m_j+1}^{\infty} 2 \sum_{i=\alpha_{n-1}+1}^{\alpha_n} \frac{1}{2^{m_n}} \cdot \frac{1}{i^{\varepsilon_i/2}} \leqq M_j^3 \sum_{n=m_j+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Ist $x = 1$, so ist (1) nach der Definition von $\psi_i(x)$ offenbar.

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

Beweis von Satz II. Sei die Indexfolge $\{m_n\}$ $\big((1 \leqq) m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots\big)$ jetzt derart angegeben, daß für $k \geqq 2^{m_n}$ die Ungleichung $\lambda_k \geqq (n+1)^2$ erfüllt ist. Die Mengen E_j, die Funktionen $\psi_k^{(j)}(x)$ und die Matrizen A_n haben die gleiche Bedeutung wie im Satz I. Dann können wir wieder das Lemma anwenden. Bezeichnen $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots)$ die durch (3) in diesem Fall definierten Funktionen mit $\varphi_i(1)=0$, so sind die Funktionen $\varphi_i(x)$ orthogonal und $L[0, 1]$-vollständig. Wir beweisen jetzt die Ungleichung (2). Ist $x \in [0, 1)$, so gibt es ein Index $j=j(x)$ mit $x \in E_j$. Nach dem Obigen gilt

$$\sum_{i=\alpha_{n_1}+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} |\Phi_i(x)|^2 = \sum_{n=m_j+1}^{\infty} \sum_{i=\alpha_{n-1}+1}^{\alpha_n} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{\sqrt{2^{m_n}}} |\psi_{n-m_j}^{(j)}(x)| \right)^2 \leqq$$

$$\leqq M_j^2 \sum_{n=m_j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_n}} \sum_{i=\alpha_{n-1}+1}^{\alpha_n} \frac{1}{\lambda_i} \leqq M_j^2 \sum_{n=m_j+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

woraus die Behauptung (2) des Satzes II offenbar folgt.

Schriftenverzeichnis

[1] А. М. Олевский, Об ортогональных рядах по полным системам, *Матем. сборник*, **11 (100)**, (1962), 707—748.
[2] W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bull. Acad. Polonaise* (1927), 81—115.

(Eingegangen am 7. Januar 1965)

Bemerkung zur Konvergenz der Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

1. D. E. MENCHOFF[1]) und H. RADEMACHER[2]) haben bewiesen, daß aus der Bedingung

$$\sum a_n^2 \log^2 n < \infty \tag{1}$$

die Konvergenz der Orthogonalreihe

$$\sum a_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ im Grundintervall fast überall folgt.

In dieser Note beweisen wir mit einer kleinen Modifikation der Beweisführung von D. E. MENCHOFF und H. RADEMACHER die folgende Behauptung:

Satz. *Unter der Bedingung*

$$\sum \log n \cdot a_n^2 \log \frac{1}{a_n^2} < \infty \quad ^{3)} \tag{3}$$

konvergiert die Reihe (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall fast überall.*

Bemerkungen. Aus (1) folgt (3) offensichtlich, und man kann leicht eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ angeben, derart, daß (3) erfüllt wird, (1) aber nicht. Weiterhin sind (1) und (3) für eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge gleichwertig.

2. Die Behauptung folgt aus dem folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. *Es sei* $\{c_n\}_1^N$ *eine endliche Folge von Null verschiedenen Zahlen. Dann gilt*

$$\int_0^1 \left(\max_{1\leqq k\leqq N} |c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_k\varphi_k(x)|\right)^2 dx \leqq C \log N \sum_{k=1}^N c_k^2 \log \frac{c_1^2 + \ldots + c_N^2}{c_k^2}$$

[1]) D. E. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, 4 (1923), 82—105.

[2]) H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, 87 (1922), 112—138.

[3]) In den Fällen $\frac{1}{a^2} < 2$ und $a = 0$ soll man $\log \frac{1}{a^2}$ durch 1 ersetzen.

für jedes im Intervall [0, 1] *orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}_1^N$, *wobei* $C>0$ *eine absolute Konstante bedeutet.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $c_1^2+\ldots+c_N^2=1$ vorausgesetzt werden. Es seien $\sigma_0(x)\equiv 0$, $\sigma_1(x)=c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_N\varphi_N(x)$, $\sigma_{00}(x)=c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_{n_1}\varphi_{n_1}(x)$ und $\sigma_{01}(x)=c_{n_1+1}\varphi_{n_1+1}(x)+\ldots+c_N\varphi_N(x)$, wobei n_1 folgenderweise definiert wird: Sei m die kleinste natürliche Zahl mit $c_1^2+\ldots+c_m^2\geqq\frac{1}{2}$; ist $m<N$, dann setzen wir $n_1=m$; im entgegengesetzten Fall sei $n_1=\mu$, wobei μ die größte natürliche Zahl mit $c_1^2+\ldots+c_\mu^2<\frac{1}{2}$ bedeutet; endlich, im Falle $N=1$ setzen wir $\sigma_{00}(x)\equiv\sigma_{01}(x)\equiv 0$. Dann sei $\nu_1=[n_1/2]$ und $\nu_2=[(n_1+N)/2]$ [4]) und wir setzen

$$\sigma_{000}(x)=c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_{\nu_1}\varphi_{\nu_1}(x),\quad \sigma_{001}(x)=c_{\nu_1+1}\varphi_{\nu_1+1}(x)+\ldots+c_{n_1}\varphi_{n_1}(x),$$

$$\sigma_{010}(x)=c_{n_1+1}\varphi_{n_1+1}(x)+\ldots+c_{\nu_2}\varphi_{\nu_2}(x),\quad \sigma_{011}(x)=c_{\nu_2+1}\varphi_{\nu_2+1}(x)+\ldots+c_N\varphi_N(x);$$

ist $n_1=1$, bzw. $n_1=N-1$, dann sei $\sigma_{000}(x)\equiv\sigma_{001}(x)\equiv 0$, bzw. $\sigma_{010}(x)\equiv\sigma_{011}(x)\equiv 0$. Die Summen $\sigma_{i_1\ldots i_k}(x)$ definieren wir ähnlicherweise; wir teilen nämlich $\sigma_{i_1\ldots i_{2k}}(x)$ in zwei „ungefähr gleiche" Teile nach den Indizes $1,\ldots,N$, und wir teilen $\sigma_{i_1\ldots i_{2k+1}}(x)$ in zwei „ungefähr gleiche" Teile nach der Verteilung $c_1^2\ \ldots, c_N^2$.

Die folgenden Behauptungen können leicht eingesehen werden. Im Falle $k>3\log N$ gilt $\sigma_{i_1\ldots i_k}(x)\equiv 0$ für jedes $i_1,\ldots,i_k$; jedes Glied $c_k\varphi_k(x)$ gehört höchstens zu $4\left(\left[\log\frac{1}{c_k^2}\right]+1\right)$ nichtleeren Summen $\sigma_{i_1\ldots i_k}(x)$, und jede Partialsumme $c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)$ kann in der Form

$$c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_m\varphi_m(x)=\sigma_{i_1}(x)+\sigma_{i_1i_2}(x)+\ldots+\sigma_{i_1i_2\ldots i_k}(x)$$

aufgeschrieben werden, wobei die $\sigma_{i_1i_2\ldots i_k}$ an der rechten Seite kein gemeinsames Glied haben, und $k\leqq 3\log N$ ist. Durch Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhalten wir daraus

$$\left(\max_{1\leqq k\leqq N}|c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_k\varphi_k(x)|\right)^2\leqq 4\log N\sum_{k=1}^{[3\log N]}\sum_{j_1,\ldots,j_k}\sigma_{j_1\ldots j_k}^2(x),$$

wobei in der inneren Summe für jede $(j_1,\ldots,j_k)$ $(j_1,\ldots,j_k=0$, oder $1)$ zu summieren ist. Auf Grund der obigen erhalten wir daraus durch Integration die Behauptung.

3. Zum Beweis des Satzes kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\Sigma a_n^2=1$. Es sei $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ ein beliebiges orthonormiertes System in [0, 1]. Ist (3) erfüllt, dann gilt $\Sigma a_n^2<\infty$. Es sei $f(x)\in L^2(0,1)$ der Limes im Quadratmittel der Partialsummen $s_n(x)$ der Reihe (2). Dann ist

$$\sum_n\int_0^1(f(x)-s_{2^n}(x))^2\,dx=\sum_n\sum_{k=2^n+1}^{\infty}a_k^2\leqq\sum_k a_k^2\log k<\infty.$$

[4]) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

Daraus folgt, daß $\lim_{n\to\infty} s_{2^n}(x)=f(x)$ fast überall besteht. Nach dem Hilfssatz besteht

$$\sum_n \int_0^1 \Big(\max_{2^n<k\leqq 2^{n+1}} |a_{2^n+1}\varphi_{2^n+1}(x)+\ldots+a_k\varphi_k(x)|\Big)^2 dx \leqq$$

$$\leqq 4\sum_n \log 2^n \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k^2 \log \frac{a_{2^n+1}^2+\ldots+a_{2^{n+1}}^2}{a_k^2} \leqq$$

$$\leqq 4\sum_n \log 2^n \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k^2 \log\frac{1}{a_k^2} \leqq 8\sum_k \log k\cdot a_k^2 \log \frac{1}{a_k^2}<\infty.$$

Auf Grund von (3) erhalten wir

$$\delta_m(x)=\max_{2^m<k<2^{m+1}} |a_{2^m+1}\varphi_{2^m+1}(x)+\ldots+a_k\varphi_k(x)|\to 0 \qquad (m\to\infty)$$

fast überall. Daraus folgt

$$|s_n(x)-s_{2^m}(x)|\leqq \delta_m(x)\to 0 \qquad (n\to\infty;\ 2^m<n<2^{m+1})$$

fast überall. Also konvergiert die Reihe (2) fast überall.

(Eingegangen am 6. April 1965)

Axiomatischer Aufbau eines Systems der deontischen Logik

Von I. RUZSA in Budapest

Zum 60sten Geburtstag von Professor L. Kalmár

Die meisten Arbeiten über deontische Modalität behandeln die deontische Logik in einer der moralisch-juristischen Interpretation angemessenen Form. (S. z. B. [1], [2], [3], [4].) Der vorliegende Aufsatz legt einen axiomatischen Aufbau der deontischen Logik dar, der eine moralisch-juristische Interpretation zwar nicht ausschließt, dabei aber (und vor allem) die Behandlung gewisser Beziehungen einer nicht voll-kausalen Erscheinung zuzulassen scheint.

Das im Nachstehenden entwickelte System — wir wollen es kurz *System* ***D*** nennen — ist unter den übrigen Systemen der deontischen Logik mit dem System *P* von G. H. VON WRIGHT [1] nächstverwandt. Seine Haupteigenschaften — im Vergleich mit anderen Systemen der deontischen Logik — können etwa wie folgt zusammengefasst werden:

Das System ***D*** unterscheidet scharf zwischen *Handlungen* (Akten) und *Aussagen* über Handlungen. In der Syntax des Systems sind die ersten *Terme*, die zweiten *Formeln*. Das System ***D*** benutzt ausschließlich *deontische* modale Operatoren. Die Möglichkeit einer Iteration von deontischen Operatoren besteht im System ***D*** nicht (da ein deontischer Operator auf Aussagen sinngemäß nicht bezogen werden kann). — Formeln, die im System ***D*** sinngemäße Äquivalente von in den übrigen Systemen der deontischen Logik herleitbaren Formeln sind, sind im System ***D*** ebenfalls herleitbar. (S. III. 1—10, 13—14, 16, 22, 24.)

Außer den traditionellen Operatoren *O* und *P* (mit der Interpretation *O*: „verpflichtend", *P*: „zuläßig") hat das System ***D*** noch einen Operator *T*, der auf eine Handlung angewandt ausdrücken soll, daß die betreffende Handlung „ausgeführt" ist. Es wird auch eine deontische Implikation unter Handlungen eingeführt, die besagt, daß das Ausgeführtsein des Vorderglieds das Verpflichtendsein des Hinterglieds impliziert (im Sinne des Aussagenkalküls). Diese Art von Implikation erweist sich strenger als die in der deontischen Logik üblicherweise als deontische Implikation interpretierte Formel (die im System ***D*** ebenfalls formalisiert werden kann). Im System ***D*** gibt es eine Anzahl von „quasi-herleitbaren" Implikationsschemen, die im allgemeinen nicht herleitbar sind, falls jedoch in diesen das Vorderglied herleitbar ist, so folgt hieraus auch die Herleitbarkeit des Hinterglieds. (S. III. 20, 26—30.) Das System ***D*** zeigt in dieser Hinsicht eine gewisse Verwandschaft mit dem „strikten" Aussagenkalkül.

Das System ***D*** enthält keine konstanten Handlungen (und auch keine Aussage-Variablen). Das System kann jedoch durch die Aufnahme von konstanten Handlungen und Axiomen über solche erweitert werden. Eine Erweiterung, die das in Betracht Ziehen der temporalen (zeitlichen) Beschaffenheit des Ausgeführtseins der Handlungen erlaubt, ist ebenfalls möglich. Auf die Untersuchung dieser Probleme beabsichtige ich in einem folgenden Aufsatz zurückzukommen.

Im Folgenden geben wir unter I das Begriffsnetz, das Axiomensystem und die Schlußregeln des Systems ***D*** an. Unter II wird die syntaktische Widerspruchsfreiheit (im dreifachen Sinne) des Systems ***D*** nachgewiesen. Unter III wollen wir durch eine Liste von herleitbaren bzw. nicht herleitbaren Formeln den Unterschied zwischen System ***D*** und anderen Axiomensystemen der deontischen Logik veranschaulichen. Endlich beschreiben wir unter IV ein allgemeines Entscheidungsverfahren für die Herleitbarkeit der Formeln im System ***D***.

I.

A. Das Begriffsnetz des Systems D

A. a. *Grundzeichen:*

1. die Variablen; ihre Mitteilungszeichen sind kleine lateinische Buchstaben: $a, b, c, \ldots$;
2. die Operatoren für Handlungen (Akte): $\llcorner$, $\cap$, $\cup$;
3. die Operatoren für Aussagen: $=$, T, P, $\neg$, $\wedge$, $\vee$;
4. runde Klammern. (Der Gebrauch der Klammern wird im allgemeinen vermeidet, wo ihre Weglassung kein Mißverständnis verursacht.)

A. b. *Terme:*

1. Jede Variable ist ein Term;
2. ist α ein Term, so ist auch $(\llcorner\alpha)$ ein Term;
3. sind α und β Terme, so sind auch $(\alpha\cap\beta)$ und $(\alpha\cup\beta)$ Terme. Andere Terme gibt es nicht.

A. c. *Primformeln:*

1. Ist α ein Term, so ist $(T\alpha)$, bzw. $(P\alpha)$ eine Primformel.
2. Sind α und β Terme, so ist $(\alpha=\beta)$ eine Primformel. Andere Primformel gibt es nicht.

Semantische Interpretation. Es seien die Variablen (beliebige, veränderliche) *Handlungen (Akte).* Es bedeute Ta die Aussage: „die Handlung a ist *ausgeführt* (transactus, transacted)", Pa die Aussage: „die Handlung a ist *zuläßig* (permitted)", endlich $a=b$ die Aussage: „die Handlungen a und b sind *gleich*". $\llcorner\alpha$ sei die *Komplementär*-Handlung der Handlung α, $\alpha\cap\beta$ sei der *Durchschnitt*, $\alpha\cup\beta$ sei die *Vereinigung* der Handlungen α und β. Also sind alle Terme Handlungen. — $\llcorner\alpha$ ist eine Handlung, die dann und nur dann ausgeführt ist, wenn α nicht ausgeführt ist. $\alpha\cup\beta$ bzw. $\alpha\cap\beta$ ist eine Handlung, die dann und nur dann ausgeführt ist, wenn wenigstens eine bzw. beide der Handlungen α, β ausgeführt ist. $\alpha=\beta$ bedeutet, daß die Handlung α dann und nur dann ausgeführt oder erlaubt ist, wenn die Handlung β ausgeführt bzw. erlaubt ist. — Die folgenden Axiome sind ebenfalls im Einklang mit dieser Interpretation. — Die einfachsten Aussagen über Handlungen sind durch die Primformeln formalisiert.

A. d. *Formeln:*

1. jede Primformel ist eine Formel;
2. ist Γ eine Formel, so ist auch $(\neg\Gamma)$ eine Formel;
3. sind Γ und Δ Formeln, so sind auch $(\Gamma\wedge\Delta)$ und $(\Gamma\vee\Delta)$ Formeln. Andere Formeln gibt es nicht.

Semantische Interpretation: Die Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ werden wie im Aussagenkalkül gebraucht zum Ausdruck der logischen Operationen der Negation, der Konjunktion bzw. der Disjunktion. Folglich sind durch die Formeln *Aussagen* über die Handlungen ausgedrückt.

A. e. *Definierte Zeichen* (Abkürzungen):

1. Die Zeichenfolge „$\Gamma\supset\Delta$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$\neg\Gamma\vee\Delta$"; Γ und Δ sind Formeln. (Implikation.)
2. Die Zeichenfolge „$\Gamma\sim\Delta$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$(\Gamma\supset\Delta)\wedge\wedge(\Delta\supset\Gamma)$"; Γ und Δ sind Formeln. (Äquivalenz.)
3. Die Zeichenfolge „$O\alpha$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$\neg P\llcorner\alpha$"; α ist ein Term.
4. Die Zeichenfolge „$F\alpha$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$\neg P\alpha$"; α ist ein Term.
5. Die Zeichenfolge „$I\alpha$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$P\alpha\wedge P\llcorner\alpha$"; α ist ein Term.
6. Die Zeichenfolge „$\alpha\rightarrow\beta$" dient zur Abkürzung der Zeichenfolge „$T\alpha\supset O\beta$"; α und β sind Terme.

Semantische Interpretation: $O\alpha$ bedeutet: „α ist verpflichtend (obligatory)", $F\alpha$ bedeutet: „α ist verboten (forbidden)", $I\alpha$ bedeutet: „α ist gleichgültig (indifferent)". Man lese $\alpha\rightarrow\beta$: „durch α ist β deontisch impliziert".

B. Axiome:

B. a. *Axiome der Handlungen:*

In den Axiomen B1—B7 sind α, β, γ beliebige *Terme*.

B1. $\alpha\cup\alpha=\alpha$.
B2. $\alpha\cup\beta=\beta\cup\alpha$.
B3. $(\alpha\cup\beta)\cup\gamma=\alpha\cup(\beta\cup\gamma)$.
B4. $\alpha\cup(\beta\cap\gamma)=(\alpha\cup\beta)\cap(\alpha\cup\gamma)$.
B5. $\llcorner(\alpha\cup\beta)=\llcorner\alpha\cap\llcorner\beta$.
B6. $\alpha\cup(\beta\cap\llcorner\beta)=\alpha$.
B7. $\llcorner\llcorner\alpha=\alpha$.

Bemerkung. Diese Gruppe der Axiome drückt aus, daß die Struktur der Handlungen (mit den Operationen $\llcorner$, $\cap$, $\cup$) eine Boolesche Algebra ist. Vermittels der folgenden Schlußregel CI sind alle solchen Gleichheiten, die in jeder Booleschen Algebra gültig sind, aus den Axiomen B1—B7 herleitbar. (Siehe z. B. [5]) Im Aufbau ist es unwesentlich, ob wir das obige oder irgendein anderes Axiomensystem der Booleschen Algebra gebrauchen. — Zum Aufschreiben der übrigen zwei Gruppen der Axiome werden wir der Kürze halber auch einige der in A. e. definierte Zeichen benützen.

B. b. *Deontische Axiome:*

In den Axiomen B8—B11 sind α und β beliebige *Terme*.

B8. $T\alpha\cup\llcorner\alpha$.
B9. $T\alpha\cap\beta\sim(T\alpha\wedge T\beta)$.
B10. $P\alpha\cup\llcorner\alpha$.
B11. $P\alpha\cup\beta\sim(P\alpha\vee P\beta)$.

Bemerkung. Die Axiome B9 bzw. B11 drücken eine Distributivität bezüglich des Operators T bzw. P aus. Ihre Interpretation — sowie die der Axiome B8 und B10 — ist klar. Es ist ebenfalls klar, daß die Annahme der Äquivalenz $P\alpha\cap\beta \sim \sim(P\alpha\wedge P\beta)$ (der Dualen von B11) als Axiom (oder ihre Herleitbarkeit) mit der bisherigen Interpretation unvereinbar wäre, da aus dem Erlaubtsein zweier Handlungen keineswegs das Erlaubtsein *der gemeinsamen Ausführung* beider Handlungen folgt. Unter III wird gezeigt, daß im System $\boldsymbol{D}$ $P\alpha\cap\beta \supset (P\alpha\wedge P\beta)$ herleitbar ist, dagegen ihre Umkehrung $(P\alpha\wedge P\beta) \supset P\alpha\cap\beta$ nicht. — Eine Anerkennung der Dualen von B9, der Äquivalenz $T\alpha\cup\beta \sim (T\alpha\vee T\beta)$ mag bedenklich erscheinen. Im System $\boldsymbol{D}$ ist $(T\alpha\vee T\beta) \supset T\alpha\cup\beta$ wohl herleitbar, ihre Umkehrung $T\alpha\cup\beta \supset \supset (T\alpha\vee T\beta)$ jedoch nicht, folglich ist die besagte Äquivalenz kein Theorem im System $\boldsymbol{D}$. Gegen die Anerkennung dieser Äquivalenz spricht die Erwägung, daß es aus dem *beständigen* Ausgeführtsein der Handlung $\alpha\cup\beta$ keineswegs folgt, daß wenigstens einer der Handlungen α, β *beständig* ausgeführt ist. (Es ist möglich, daß ein Schalter sich fortwährend in einer der Stellungen α, β befindet, jedoch weder fortwährend in der Stellung α noch fortwährend in der Stellung β sich befindet.)

B. c. *Axiome des Aussagenkalküls:*

In den Axiomen B12—B19 sind Γ, Δ, Θ beliebige *Formeln.*

B12. $(\Gamma\vee\Gamma) \sim \Gamma$. B13. $(\Gamma\vee\Delta) \sim (\Delta\vee\Gamma)$.

B14. $((\Gamma\vee\Delta)\vee\Theta) \sim (\Gamma\vee(\Delta\vee\Theta))$. B15. $(\Gamma\vee(\Delta\wedge\Theta)) \sim ((\Gamma\vee\Delta)\wedge(\Gamma\vee\Theta))$.

B16. $\neg(\Gamma\vee\Delta) \sim (\neg\Gamma\wedge\neg\Delta)$. B17. $(\Gamma\vee(\Delta\wedge\neg\Delta)) \sim \Gamma$.

B18. $\neg\neg\Gamma \sim \Gamma$. B19. $\Gamma\vee\neg\Gamma$.

Bemerkung. Diese Gruppe der Axiome kann durch ein beliebiges anderes Axiomensystem des Aussagenkalküls ersetzt werden (unter etwaiger Modifikation der Schlußregeln).

Um die Angabe der Schlußregeln zu erleichtern, ist es zweckmäßig, den Begriff *der Konstituenten des Terms* bzw. *der Formel* einzuführen, durch die folgende simultane Induktion:

1. Ist α ein Term, so ist α eine *Konstituente* von α, von $\llcorner\alpha$, von $T\alpha$ und von $P\alpha$. 2. Sind α und β Terme, so sind α und β *Konstituente* von $\alpha\cup\beta$, von $\alpha\cap\beta$ und von $\alpha=\beta$. 3. Sind α und β Terme und ist C ein Term oder eine Formel, sowie α eine *Konstituente* von β und β eine *Konstituente* von C, so ist α eine *Konstituente* von C. 4. Ist Γ eine Formel, so ist Γ eine *Konstituente* von Γ und von $\neg\Gamma$. 5. Sind Γ und Δ Formeln, so sind Γ und Δ *Konstituente* von $\Gamma\wedge\Delta$ und von $\Gamma\vee\Delta$. 6. Ist A ein Term oder eine Formel, sind Γ und Δ Formeln, sowie A eine *Konstituente* von Γ und Γ eine *Konstituente* von Δ, so ist A eine *Konstituente* von Δ. — Andere Konstituenten eines Terms bzw. einer Formel als die unter 1—6 definierten gibt es nicht.

Kurz, obgleich weniger exakt: A ist dann und nur dann eine Konstituente von B, wenn A ein Term und B ein Term oder eine Formel ist, oder A und B beide Formeln sind, und die A ausdrückende Zeichenfolge eine konsekutive Teilfolge der B ausdrückenden Zeichenfolge ist.

Wir wollen kurz mit $\Gamma[A]$ bezeichnen, daß Γ eine Formel ist, deren eine Konstituente A ist; dann hat Γ die Form XAY, wo X und Y (eventuell leere) Zeichenfolgen sind. ($\Gamma[A]$ soll also bezeichnen, daß der Term oder die Formel A eine *an einer bestimmten Stelle stehende* Konstituente der Formel Γ ist.) Es bedeute $\Gamma[B]$ die

Formel der Form XBY, wo B ein beliebiger Term oder eine beliebige Formel ist, je nach dem, ob A ein Term oder eine Formel ist. ($\Gamma[B]$ entsteht also aus $\Gamma[A]$, indem im letzteren die an der bestimmten Stelle stehende Konstituente A durch B ersetzt wird, vorausgesetzt, daß A und B beide Terme oder beide Formeln sind.

C. Schlußregeln:

Wir beschreiben hier den Sinn, in welchem wir den Ausdruck: „eine Formel ist eine unmittelbare Folge einer oder zweier anderen Formeln" gebrauchen.

C1. Die Formel $\Gamma[\beta]$ ist eine *unmittelbare Folge* der Formeln $\Gamma[\alpha]$ und $\alpha = \beta$ (α und β sind Terme). — *(Umsatz des Terms.)*

C2. Die Formel $\Gamma[\Theta]$ ist eine *unmittelbare Folge* der Formeln $\Gamma[\Delta]$ und $\Delta \sim \Theta$ (Δ und Θ sind Formeln). — *(Umsatz der Formel.)*

C3. Die Formel Δ ist eine *unmittelbare Folge* der Formeln Γ und $\Gamma \supset \Delta$. — *(Abtrennung.)*

C4. Die Formel $O\alpha$ (α ist ein Term) ist eine *unmittelbare Folge* der Formel $T\alpha$. — *(Obligation.)*

Wir nennen die Formel Γ *herleitbar*, wenn sie ein *Axiom* oder eine *unmittelbare Folge herleitbarer Formeln* ist. Andere herleitbare Formeln gibt es nicht.

II.

Das deontische System $\boldsymbol{D}$ wird *syntaktisch widerspruchsfrei* genannt, falls: a) eine Formel Γ in ihm nur dann herleitbar ist, wenn die Formel $\neg\Gamma$ in ihm nicht herleitbar ist, b) eine Formel $T\alpha$ (α ist ein Term) in ihm nur dann herleitbar ist, wenn die Formel $T\llcorner\alpha$ in ihm nicht herleitbar ist, c) eine Formel $O\alpha$ (α ist ein Term) in ihm nur dann herleitbar ist, wenn die Formel $F\alpha$ in ihm nicht herleitbar ist. Also wird hier außer der gewöhnlichen Widerspruchsfreiheitsbedingung noch gefordert, daß eine Handlung und ihre Komplementäre nicht zugleich ausgeführt sein dürfen, und daß eine Handlung nicht zugleich verpflichtend und verboten sein darf.

Es wird nachgewiesen, daß das unter I beschriebene System $\boldsymbol{D}$ — im soeben definierten Sinn — syntaktisch widerspruchsfrei ist. Zum Beweis der Widerspruchsfreiheit wird eine *Wertung* der Terme und der Formeln eingeführt.

Die Wertung „V".

Wir wollen jedem Term bzw. jeder Formel A des System $\boldsymbol{D}$ eine sog. „Wertungsfunktion" $v(A)$ zuordnen, wie es unten folgt.

V1. Es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ die *geordnete* Menge aller verschiedenen Variablen, die in der Term bzw. in der Formel A vorkommen ($n \geqq 1$). Wir definieren zu jeder Konstituente B des Terms bzw. der Formel A eine Funktion $v(B)$. Die Definitionsbereich von $v(B)$ sei die Menge sämtlicher geordneten n-tupeln, die aus den Elementen der Menge $\{0, 1\}$ zu bilden sind, ihr Wertebereich sei die Menge $\{0, 1\}$. Mit $v(B; x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnen wir den durch die Funktion $v(B)$ dem geordneten n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zugeordneten Funktionenwert. (Wo kein Missverständnis droht, werden wir diese Bezeichnung auf $v(B)$ abkürzen.) Durch die folgenden Regeln

V2—V4. wird $v(B)$ induktiv definiert für jede Konstituente B von A, den Fall B identisch mit A miteinbegriffen. So wird durch diese Regeln auch $v(A)$ definiert sein.

V2. Ist a_i das i-te Element von $(a_1, \ldots, a_n)$, so ist

$$v(a_i) \equiv v(a_i; x_1, \ldots, x_n) \equiv x_i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

V3. Sind α und β Terme und Konstituente von A, so ist

a) $v(\llcorner\alpha) \equiv 1 - v(\alpha)$;
b) $v(\alpha \cap \beta) \equiv v(\alpha) \cdot v(\beta)$;
c) $v(\alpha \cup \beta) \equiv v(\alpha) + v(\beta) - v(\alpha) \cdot v(\beta)$;
d) $v(\alpha = \beta) \equiv \begin{cases} 1, & \text{wenn } v(\alpha) \equiv v(\beta), \\ 0 & \text{sonst}; \end{cases}$
e) $v(P\alpha) \equiv v(\alpha)$;
f) $v(T\alpha) \equiv \begin{cases} 1, & \text{wenn } v(\alpha) \equiv 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

V4. Sind Γ und Δ Formeln und Konstituente von A, so ist
a) $v(\neg \Gamma) \equiv 1 - v(\Gamma)$;
b) $v(\Gamma \wedge \Delta) \equiv v(\Gamma) \cdot v(\Delta)$;
c) $v(\Gamma \vee \Delta) \equiv v(\Gamma) + v(\Delta) - v(\Gamma) \cdot v(\Delta)$.

(In den Regeln V2—V4 werden die Zeichen $\equiv, +, -, \cdot$ im gewöhnlichen arithmetischen Sinne benutzt.)

Durch die Anwendung der Wertungsregeln V1—V4 auf die Axiome ist unmittelbar (und leicht) einzusehen, daß wenn Γ ein Axiom ist, so ist $v(\Gamma) \equiv 1$.

Es ist auch leicht kontrollierbar unter Berücksichtigung der Schluß- und Wertungsregeln, daß wenn $v(\Gamma) \equiv 1$ und $v(\Delta) \equiv 1$ ist, ferner Θ eine unmittelbare Folge von Γ (bzw. von Γ und Δ) ist, so ist auch $v(\Theta) \equiv 1$.

Es ergibt sich aus den beiden Feststellungen:

(1) *Eine Formel Γ kann im System **D** nur dann herleitbar sein, wenn $v(\Gamma) \equiv 1$ ist.*

Daraus ergeben sich folgende Sätze über die Widerspruchsfreiheit:

(2) *Ist die Formel Γ herleitbar, so ist $\neg \Gamma$ nicht herleitbar.*

(3) *Ist α ein Term und ist $T\alpha$ herleitbar, so ist $T\llcorner\alpha$ nicht herleitbar.* — Nämlich nach unserer Voraussetzung und nach (1) ist $v(T\alpha) \equiv 1$, was nach V3 f) nur dann möglich ist, wenn $v(\alpha) \equiv 1$ gilt. Dann ist nach V3 a) $v(\llcorner\alpha) \equiv 0$, somit (wiederum nach V3 f) $v(T\llcorner\alpha) \equiv 0$. Also ist nach Satz (1) $T\llcorner\alpha$ nicht herleitbar.

(4) *Ist α ein Term und ist $O\alpha$ herleitbar, so ist $F\alpha$ nicht herleitbar.* — Nämlich (nach der Definition 3 und 4 in I. A. e)) ist $O\alpha$ bzw. $F\alpha$ die Abkürzung für die Zeichenfolge $\neg P\llcorner\alpha$ bzw. $\neg P\alpha$. Nach unserer Voraussetzung ist $O\alpha$ herleitbar, also nach (1) ist $v(\neg P\llcorner\alpha) \equiv 1$, somit nach V4 a) $v(P\llcorner\alpha) \equiv 0$, d. h. nach V3 e) $v(\llcorner\alpha) \equiv 0$, woraus nach V3 a) $v(\alpha) \equiv 1$. Durch die Anwendung von V3 e) und dann V4 a) ist $v(P\alpha) \equiv 1$ bzw. $v(\neg P\alpha) \equiv 0$, also nach (1) ist $F\alpha$ tatsächlich nicht herleitbar.

Die Sätze (2)—(3)—(4) lassen sich dahin zusammenfassen: *Das System **D** ist syntaktisch widerspruchsfrei.*

Die Wertung „V" ist nicht adäquat, d. h. es gibt Formeln Γ, für welchen $v(\Gamma)\equiv 1$, jedoch Γ im System $\boldsymbol{D}$ nicht herleitbar ist. Solche Formeln sind z. B. die unten III in der Liste „Nicht herleitbare Formeln" mit dem Zeichen (W) bezeichneten; daß diese nicht herleitbar sind, kann man durch die unter IV 4 behandelte Wertung „W" feststellen.

III.

Der Unterschied des Systems $\boldsymbol{D}$ von anderen Systemen der deontischen Logik kann etwa veranschaulicht werden durch die folgende Liste der herleitbaren bzw. nicht herleitbaren Formeln und Schlußregeln. Formeln mit gleichen Nummern in den beiden Listen zeigen gewisse formelle Ähnlichkeit.

Die Herleitung der herleitbaren Formeln ist nicht angegeben. Ihre Herleitbarkeit ist z. B. durch das unter IV zu besprechende Entscheidungsverfahren kontrollierbar. Neben dem nicht herleitbaren Formeln steht in Klammern die Wertung (V oder W), wodurch der Nichtherleitbarkeit festzustellen ist. Das Zeichen (W) bezieht sich auf die unter IV anzugebende Wertung „W".

Wir werden das Meta-Zeichen $\vdash$ als Kurzwort für die herleitbaren Schlußregeln („quasi-herleitbaren Implikationsschemen") einführen. „$\Gamma\vdash\Delta$" bedeutet: „Ist die Formel Γ herleitbar, so ist auch die Formel Δ herleitbar." Später werden wir das Zeichen $\vdash$ auch noch in anderen Bedeutungen anwenden, und zwar: „$\vdash\Gamma$" bedeutet: „Die Formel Γ ist herleitbar"; „$\neg\vdash\Gamma$" bedeutet: „Die Formel Γ ist nicht herleitbar".

Herleitbare Formeln und Schlußregeln *Nicht herleitbare Formeln*
(α, β, γ sind beliebige *Terme*, a, b, c sind *Variablen*.)

1. a)	$P\alpha\vee P\llcorner\alpha$	1*.	$Ta\vee T\llcorner a$	(V)
1. b)	$O\alpha\supset P\alpha$			
2.	$O\alpha\cup\llcorner\alpha$	2*.	$Oa\vee O\llcorner a$	(W)
3.	$F\alpha\cap\llcorner\alpha$	3*.	$\neg Ta\cap\llcorner a$	(W)
4.	$P\alpha\cap\llcorner\alpha\supset I\alpha$	4*.	$Pa\cap\llcorner a\sim Ia$	(W)
5. a)	$\neg(O\alpha\cup\beta\wedge F\alpha\wedge F\beta)$	5*.	$\neg(Oa\cup b\wedge\neg Ta\wedge\neg Tb)$	(V)
5. b)	$\neg(P\alpha\cup\beta\wedge F\alpha\wedge F\beta)$			
6.	$\neg O\alpha\sim P\llcorner\alpha$	6*. a)	$T\llcorner a\supset\neg Ta$	(W)
7.	$O\alpha\cap\beta\sim(O\alpha\wedge O\beta)$	6*. b)	$\neg Ta\supset T\llcorner a$	(V)
8.	$(O\alpha\vee O\beta)\supset O\alpha\cup\beta$	8*.	$Oa\cup b\supset(Oa\vee Ob)$	(W)
9.	$O\llcorner\alpha\cup\beta\supset(O\alpha\supset O\beta)$			
10.	$P\alpha\cap\beta\supset(P\alpha\wedge P\beta)$	10*.	$(Pa\wedge Pb)\supset Pa\cap b$	(W)
11.	$(T\alpha\vee T\beta)\supset T\alpha\cup\beta$	11*.	$Ta\cup b\supset(Ta\vee Tb)$	(W)
12.	$T\alpha\cap\beta\supset T\alpha$			
13.	$(O\alpha\wedge O(\llcorner\alpha\cup\beta))\supset O\beta$			
14.	$(P\alpha\wedge O(\llcorner\alpha\cup\beta))\supset P\beta$			
15. a)	$(T\alpha\wedge\alpha\rightarrow\beta)\supset O\beta$	15*. a)	$(Oa\wedge a\rightarrow b)\supset Ob$	(V)
15. b)	$(T\alpha\wedge\alpha\rightarrow\beta)\supset P\beta$	15*. b)	$(Pa\wedge a\rightarrow b)\supset Pb$	(V)
16.	$(F\beta\wedge O(\llcorner\alpha\cup\beta))\supset F\alpha$			
17.	$(F\beta\wedge\alpha\rightarrow\beta)\supset\neg T\alpha$	17*.	$(Fb\wedge a\rightarrow b)\supset Fa$	(V)
18.	$O\alpha\supset\beta\rightarrow\alpha$	19*. a)	$T\llcorner a\supset a\rightarrow b$	(W)

19.	$\neg T\alpha \supset \alpha \to \beta$	19*. b)	$Fa \supset a \to b$	(W)
20. a)	$O\alpha \wedge \alpha \to \beta \vdash O\beta$			
20. b)	$P\alpha \wedge \alpha \to \beta \vdash P\beta$			
21.	$\alpha \to \beta \supset (T\alpha \supset P\beta)$	21*. a)	$a \to b \supset (Oa \supset Ob)$	(V)
22.	$O \llcorner \alpha \cup \beta \cup \gamma \wedge F\beta \wedge F\gamma \vdash F\alpha$	21*. b)	$a \to b \supset (Oa \supset Pb)$	(V)
23.	$(\alpha \to \beta \cup \gamma \wedge F\beta \wedge F\gamma) \supset \neg T\alpha$	23*.	$(a \to b \cup c \wedge Fb \wedge Fc) \supset Fa$	(V)
24.	$(O\alpha \wedge O \llcorner \alpha \cup \llcorner \beta \cup \gamma) \supset O \llcorner \beta \cup \gamma$			
25.	$(\alpha \cap \beta \to \gamma \wedge T\alpha) \supset \beta \to \gamma$	25*.	$(a \cap b \to c \wedge Oa) \supset (Ob \supset Oc)$	(V)
26.	$T\alpha \vdash O\alpha$	26*. a)	$Ta \supset Oa$	(W)
		26*. b)	$Oa \supset Ta$	(V)
27. a)	$T\alpha \vdash P\alpha$	27*. a)	$Ta \supset Pa$	(W)
27. b)	$T \llcorner \alpha \vdash F\alpha$	27*. b)	$T \llcorner a \supset Fa$	(W)
27. c)	$O\alpha \vdash P\alpha$	27*. c)	$Pa \supset Ta$	(V)
		27*. d)	$\neg Ta \supset P \llcorner a$	(V)
		27*. e)	$\neg Oa \supset T \llcorner a$	(V)
		27*. f)	$Fa \supset \neg Ta$	(W)
		27*. g)	$Fa \supset T \llcorner a$	(V)
28.	$T \llcorner \alpha \vdash \llcorner \alpha \to \alpha \supset O\alpha$	28*.	$\llcorner a \to a \supset Oa$	(V)
29.	$T \llcorner \alpha \cup \beta \vdash O\alpha \supset O\beta$	29*.	$T \llcorner a \cup b \supset (Oa \supset Ob)$	(W)
30. a)	$T\alpha \cap \beta \vdash O\alpha$			
30. b)	$T\alpha \cap \beta \vdash P\alpha \wedge P\beta$			

IV.

Wir wollen ein Verfahren darlegen, wodurch die Herleitbarkeit einer beliebigen Formel des Systems **D** in endlich vielen Schritten zu entscheiden ist.

1. Herleitbarkeit von Primformeln.

(5) *Die Primformel $\alpha = \beta$ (α und β sind Terme) ist im System* **D** *dann und nur dann herleitbar, wenn $v(\alpha = \beta) \equiv 1$ ist.*

Nämlich nach den Axiomen B1—B7 bilden die Terme in **D** eine Boolesche Algebra, und es ist bekannt, daß durch die Regeln V1, V2, V3 a)—c) die Herleitbarkeit einer beliebigen Gleichheit der Booleschen Algebra entscheidbar ist.

(6) *Die Primformel $T\alpha$ bzw. $P\alpha$ und die Formel $O\alpha$ (α ist ein Term) ist im System* **D** *dann und nur dann herleitbar, wenn $\alpha = a \cup \llcorner a$ herleitbar ist.*

Beweis 1. „Dann." Es sei $\alpha = a \cup \llcorner a$ herleitbar. Aus diesem und dem Axiom B8 mit der Schlußregel C1 ist $T\alpha$, weiter aus dem letzten mit der Schlußregel C4. ist $O\alpha$ herleitbar. Die Formel $P\alpha \cup \llcorner \alpha \sim (P\alpha \vee P \llcorner \alpha)$ auf Grund des Axioms B11 ist herleitbar. Unter Anwendung der Schlußregel C2 auf die letztere Formel und auf das Axiom B10, erhält man die Formel $P\alpha \vee P \llcorner \alpha$ (vgl. III. 1. a); diese kann auch in der Form $\neg P \llcorner \alpha \supset P\alpha$ oder $O\alpha \supset P\alpha$ (vgl. III. 1.b) geschrieben werden. Aus der letzteren und der schon hergeleiteten Formel $O\alpha$ gewinnt man mit der Schlußregel C3 die Formel $P\alpha$.

2. „Nur dann." Setzen wir voraus, daß $\alpha = a \cup \llcorner a$ nicht herleitbar ist. Nach der Regel V3 d) und (5) ist dann $v(\alpha) \not\equiv v(a \cup \llcorner a)$. Wegen $v(a \cup \llcorner a) \equiv 1$ ist $v(\alpha) \not\equiv 1$. Folglich nach V3 f) bzw. e) ist $v(T\alpha) \equiv 0$ bzw. $v(P\alpha) \not\equiv 1$. Nach Satz (1) sind dann weder $T\alpha$ noch $P\alpha$ herleitbar. Sind also $T\alpha$ oder $P\alpha$ herleitbar, so ist es unmöglich, daß $\alpha = a \cup \llcorner a$ nicht herleitbar sei. Da $P\alpha$ aus $O\alpha$ herleitbar ist, darum zieht die Herleitbarkeit von $O\alpha$ die Herleitbarkeit von $\alpha = a \cup \llcorner a$ nach sich.

Auf Grund der Sätze (5)—(6) kann man sagen, daß durch die Regeln V1—3 der Wertung „V" die Herleitbarkeit aller Primformeln und Formeln der Form $O\alpha$ in endlich vielen Schritten entscheidbar ist.

2. Die Atome der Formel.

Wir nennen die herleitbaren Primformeln sowie die herleitbaren Formeln der Form $O\alpha$ *die konstanten Atome.*

Die Konstituenten einer Formel, die entweder selbst oder ihre Negierten konstante Atome sind, nennen wir *die konstanten Konstituenten der Formel.* Die zu den konstanten Konstituenten einer Formel gehörenden konstanten Atomen nennen wir *die konstanten Atome der Formel.* Infolge der Definitionen und der Sätze (5)—(6) ist es klar, daß man über eine beliebige Konstituente einer Formel in endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob sie ein konstantes Atom ist oder nicht.

Man setze voraus, daß die Menge $\{a_1, \ldots, a_p\}$ sämtliche im Term α vorkommenden Variablen enthält. Der Term $\alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_k$ mit $\alpha_i = c_{i1} \cup \ldots \cup c_{ip}$ und $c_{ij} = a_j$ oder $c_{ij} = \llcorner a_j$ $(j=1, \ldots, p;\ i=1, \ldots, k)$ wird *die perfekte konjunktive Normalform von α über den Variablen $a_1, \ldots, a_p$* genannt, vorausgesetzt, daß die Terme $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ alle verschieden sind und $\alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_k = \alpha$ herleitbar ist. Es ist bekannt, daß ein jeder Ausdruck α der Booleschen Algebra (also jeder Term α des Systems $\boldsymbol{D}$) ihre perfekte konjunktive Normalform hat — den Fall der Herleitbarkeit von $\alpha = a \cup \llcorner a$ ausgenommen —, und wenn die Menge $\{a_1, \ldots, a_p\}$ fixiert ist, ist die perfekte konjunktive Normalform von α „wesentlich" eindeutig. Die Ausnahmestellung des Falls $\alpha = a \cup \llcorner a$ kann aufgehoben werden, wenn der „leere" Term als die perfekte konjunktive Normalform von α zugelassen wird. (Dieser Fall erweist sich aber in Weiteren als uninteressant für uns.)

Die Duale der perfekten konjunktiven Normalform ist *die perfekte disjunktive Normalform.* Vertauschen wir die Rollen der Operatoren $\cup$ und $\cap$ in der obigen Definition, so entsteht die Definition der Letzteren. Jeder Term α, wenn die obige Menge $\{a_1, \ldots, a_p\}$ fixiert ist, ist mit einer „wesentlich" eindeutig bestimmten perfekten disjunktiven Normalform gleich (im Fall der Herleitbarkeit von $\alpha = a \cap \llcorner a$ den „leeren" Terms als die perfekte disjunktive Normalform von α betrachtet — dieser Fall ist aber für uns auch uninteressant).

Es sei:

$T\alpha$ eine *nicht konstante Konstituente* der Formel Γ,

$\{a_1, \ldots, a_n\}$ die Menge der Variablen, die wenigstens in einer nicht konstanten Konstituenten der Form $T\beta$ in der Formel Γ vorkommen, die Elemente dieser Menge nennen wir die T-variablen der Formel Γ.

$\alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_k$ die perfekte *konjunktive* Normalform des Terms α über den Variablen $a_1, \ldots, a_n$ (es ist leicht einzusehen, daß diese nicht „leer" sein wird).

Unter diesen Voraussetzungen nennen wir die Primformeln $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_k$ *die Γ-Atome* der Primformel $T\alpha$. — Es ist eine Folge des Axioms B9, daß $\vdash T\alpha \sim \sim (T\alpha_1 \wedge \ldots \wedge T\alpha_k)$ ist. Die rechte Seite dieser Äquivalenz wird *die Normalform der Primformel $T\alpha$ bezüglich Γ* genannt. Es ist klar, daß diese Normalform von $T\alpha$ durch $T\alpha$ und durch die Menge der T-variablen der Formel Γ eindeutig bestimmt ist.

Es sei weiter:

$P\alpha$ eine nicht konstante Konstituente der Formel Γ,

$\{b_1, \ldots, b_m\}$ die Menge der Variablen, die wenigstens in einer nicht konstanten Konstituenten der Form $P\beta$ in der Formel Γ vorkommen, die Elemente dieser Menge nennen wir die P-variablen der Formel Γ,

$\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_r$ die perfekte *disjunktive* Normalform des Terms α über den Variablen $b_1, \ldots, b_m$ (diese wird auch nicht „leer" sein).

Wir nennen die Primformeln $P\alpha_1, \ldots, P\alpha_r$ *die Γ-Atome* der Primformeln $P\alpha$. — Es ist eine Folge des Axioms B11, daß $\vdash P\alpha \sim (P\alpha_1 \vee \ldots \vee P\alpha_r)$ ist. Die rechte Seite dieser Äquivalenz wird *die Normalform der Primformel $P\alpha$ bezüglich Γ* genannt. Diese ist durch $P\alpha$ und durch die Menge der P-variablen der Formel Γ ebenfalls eindeutig bestimmt.

Es sei die Formel Γ eine Konstituente der Formel Δ (den Fall Γ identisch mit Δ einbegriffen). Wir bezeichnen als die *Δ-Atome* der Formel Γ:

die in Γ vorkommenden nicht konstanten Primformeln der Form $\alpha = \beta$ (die Menge dieser Typen der Atome ist offenbar unabhängig von Δ),

die Δ-Atome der in Γ vorkommenden nicht konstanten Primformeln der Form $T\alpha$ bzw. $P\alpha$ (die Menge dieser Typen der Atome hängt schon ab von Δ, ist aber durch die besagten Primformeln und durch Angabe der Menge der T- bzw. P-variablen eindeutig bestimmt).

3. Merkwürdige Gestalten der Formel.

Es sei die Formel Γ eine Konstituente der Formel Θ (den Fall Γ identisch mit Θ einbegriffen). Man ersetze in Γ alle nichtkonstanten Konstituenten der Form $T\alpha$ und $P\alpha$ mit ihrer Normalform *bezüglich Θ*. Die so entstandene Formel wird *die Normalform der Formel Γ bezüglich Θ* genannt und mit Γ^n_Θ bezeichnet. Anstatt Γ^n_Γ schreiben wir kurz Γ^n. Auf Grund der Axiome B9, B11 und der Schlußregel C2 ist es klar, daß $\Gamma^n_\Theta \sim \Gamma$ herleitbar ist. Die Normalform von Γ bezüglich Δ ist durch Γ und durch Angabe der Menge der T- bzw. P-variablen (also ohne Δ *in concreto* zu kennen) auch eindeutig bestimmt.

Es sei $\{A_1, \ldots, A_k\}$ die Menge der konstanten Atome und der Γ^n-Atome der Formel Γ^n. Wir betrachten die Elemente dieser Menge als Variable des Aussagenkalküls. Dadurch wird Γ^n eine Formel des Aussagenkalküls, die sich, wie bekannt, in *perfekter* („ausgezeichneter") *disjunktiver Normalform* über ihren Variablen $A_1, \ldots, A_k$ herstellen läßt. Die perfekte disjunktive Normalform von Γ^n über den Atomen $A_1, \ldots, A_k$ als Variablen wird *die absolute Normalform* der Formel Γ^n (und auch der Formel Γ) genannt und mit Γ^a bezeichnet. Es ist klar, daß $\vdash \Gamma^a \sim \sim \Gamma^n \sim \Gamma$.

Lassen wir aus Γ^a diejenigen Disjunktionsglieder weg, in welchen irgendein *negiertes* konstantes Atom vorkommt, und bezeichnen wir die zurückbleibende Formel mit Γ^+. Ist A ein konstantes Atom, dessen Negation in Γ^a vorkommt, so ist (da A herleitbar ist) $A \sim (A \vee \neg A)$ herleitbar (wie im Aussagekalkül), ebenso $\neg A \sim (A \wedge \neg A)$, ferner $(\neg A \wedge \Theta) \sim (A \wedge \neg A \wedge \Theta) \sim (A \wedge \neg A)$. Folglich ist ein jedes weggelassene Disjunktionsglied äquivalent mit $A \wedge \neg A$. Die Disjunktion solcher Glieder ist ebenfalls äquivalent mit $A \wedge \neg A$. Folglich

$$\vdash \Gamma^a \sim (\Gamma^+ \vee (A \wedge \neg A)) \sim \begin{cases} \Gamma^+, & \text{wenn } \Gamma^+ \text{ nicht leer ist,} \\ (A \wedge \neg A) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist im Falle $\vdash \Gamma^a \sim (A \wedge \neg A)$ die Formel Γ^a (und so auch Γ) nicht herleitbar, wegen der Widerspruchsfreiheit des Systems $\boldsymbol{D}$ (dagegen ist in diesem Fall $\neg \Gamma$ offensichtlich herleitbar).

In Γ^+ (falls es nicht leer ist) figurieren schon alle konstanten Atome unnegiert. Lassen wir aus Γ^+ die konstanten Atome weg. Ist die zurückbleibende Formel leer, so ist Γ^+ (und wegen $\vdash \Gamma^+ \sim \Gamma^a$ auch Γ^a) herleitbar, denn sie ist eine Disjunktion von Konjunktionen konstanter Atome (d. h. herleitbarer Formeln).

Die Formel, die aus der nicht leeren Formel Γ^+ durch Weglassung der konstanten Atome entsteht, wird *die Reduzierte* der Formel Γ (und auch der Formel Γ^a) genannt und mit Γ^r bezeichnet. Ist Γ^+ leer, so hat Γ keine Reduzierte. Ist Γ^r leer, so ist Γ herleitbar, wie es soeben gezeigt wurde. Ist Γ^r nicht leer, so ist $\vdash \Gamma^+ \sim \sim (\Gamma^r \wedge A_{i_1} \wedge \ldots \wedge A_{i_r})$, wo $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ die aus Γ^+ weggelassenen konstanten Atome bezeichnen. Da ihre Konjunktion herleitbar ist, so ist $\vdash (\Gamma^r \wedge A_{i_1} \wedge \ldots \wedge A_{i_r}) \sim \Gamma^r$, also $\vdash \Gamma^r \sim \Gamma^+ \sim \Gamma^a \sim \Gamma^n \sim \Gamma$. — Zusammenfassend:

(7) *Hat die Formel Γ keine Reduzierte, so ist sie nicht herleitbar, es ist aber dann $\neg \Gamma$ herleitbar. — Ist die Reduzierte von Γ leer, so ist Γ herleitbar. — Ist die Reduzierte von Γ nicht leer, so ist $\vdash \Gamma \sim \Gamma^r$.*

Im letzten Fall kommt die Herleitbarkeit von Γ auf die Herleitbarkeit von Γ^r hinaus.

4. Die Wertung „W".

Bei dieser Wertung kommen nur Normalformen in Betracht (im Unterschied von der Wertung „V" werden also hier die Terme nicht gewertet). Die Wertungsvorschriften sind sonst dieselben, wie im Aussagenkalkül (dem logischen Wert „wahr" entspricht 1, dem Wert „falsch" entspricht 0, die nichtkonstanten Atome spielen die Rollen der Aussagenvariablen, die konstanten Atome figurieren als Konstante). Ausführlicher:

W1. Vorausgesetzt, daß die Formel Γ eine Konstituente der Formel Θ ist, sei $(A_1, \ldots, A_n)$ die geordnete Menge aller verschiedenen Θ-Atome der Formel Γ $(n \geqq 0)$. Wir werden für jede solche Konstituente Δ der Formel Γ^n_Θ eine Funktion $w(\Delta)$ definieren, die selbst eine Formel ist. Der Definitionsbereich von $w(\Delta)$ sei die Menge sämtlicher geordneten n-tupeln, die aus den Elementen der Menge $\{0, 1\}$ zu bilden sind, ihr Wertebereich sei die Menge $\{0, 1\}$. Wir bezeichnen mit $w(\Delta; x_1, \ldots, x_n)$ (oder, wo kein Missverständnis droht, kurz mit $w(\Delta)$) den durch die Funktion $w(\Delta)$ dem geordneten n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zugeordneten Funktionenwert. Durch die Regeln W2—W4 wird $w(\Delta)$ induktiv definiert für jede solche Konstituente Δ von Γ^n_Θ, die selbst eine Formel ist, den Fall Δ identisch mit Γ^n_Θ einbegriffen. So wird durch diese Regeln auch $w(\Gamma^n_\Theta)$ definiert sein.

W2. Ist A_i das i-te Element von $(A_1, \ldots, A_n)$, so ist

$$w(A_i) \equiv w(A_i; x_1, \ldots, x_n) \equiv x_i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

W3. Ist C ein konstantes Atom von Γ, so ist

$$w(C) \equiv 1.$$

W4. Sind Δ und Λ Formeln und Konstituente von Γ^n_Θ, so ist

a) $w(\neg \Delta) \equiv 1 - w(\Delta)$;

b) $w(\Delta \wedge \Lambda) \equiv w(\Delta) \cdot w(\Lambda)$;

c) $w(\Delta \vee \Lambda) \equiv w(\Delta) + w(\Lambda) - w(\Delta) \cdot w(\Lambda)$.

(8) *Ist die Formel Γ eine Konstituente der Formel Θ, so ist $w(\Gamma^n)\equiv 1$ dann und nur dann, wenn $w(\Gamma^n_\Theta)\equiv 1$ ist.*

Beweis. Auf Grund der in IV 2 und in dem ersten Absatz von IV 3 gegebenen Definitionen und der anschließenden Bemerkungen kann man voraussetzen, daß statt der Formel Θ die Menge T_Θ bzw. P_Θ der in Θ vorkommenden T- bzw. P-variablen gegeben ist. Es ist klar, daß die Menge T_Γ (bzw. P_Γ) der T- (bzw. P-) variablen von Γ eine Teilmenge von T_Θ (bzw. P_Θ) ist.

Ist $T_\Theta = T_\Gamma$ und $P_\Theta = P_\Gamma$, so ist offenbar die Menge der Γ-Atome und die der Θ-Atome der Formel Γ identisch, ferner sind auch Γ^n und Γ^n_Θ identisch. In diesem Fall ist die Behauptung des Satzes trivial.

a) Wir setzen nun voraus, daß $P_\Theta = P_\Gamma$ ist, ferner daß T_Θ außer den in T_Γ vorkommenden T-variablen nur die einzige Variable b enthält. Auf Grund der Definitionen der Normalformen und der der Atome der nichtkonstanten Primformeln der Form $T\alpha$ ist es klar, daß in unserem Falle Γ^n_Θ aus Γ^n vermittels Ersetzen der in ihm vorkommenden Γ-Atome der Form $T\beta$ durch $T\beta \cup b \wedge T\beta \cup \llcorner b$ — d. h. durch die Konjunktion zweier Θ-Atome der Form $T\beta'$ — entsteht. Die übrigen Γ-Atome von Γ sind in diesem Fall zugleich Θ-Atome. Für das Nachfolgende wird es wesentlich, daß die neuen Θ-Atome voneinander und auch von der in der Formel Γ^n_Θ als Θ-Atome zurückbleibenden Γ-Atome verschieden sind.

b) Ganz analog ist der Fall, daß $T_\Theta = T_\Gamma$ ist und die Menge der P-variablen sich durch eine einzige neue Variable erweitert; man hat natürlich in a) P statt T, $\cap$ statt $\cup$ und $\vee$ statt $\wedge$ zu setzen.

Nun ist es klar, daß es hinreicht, den Satz für die besagten zwei Spezialfälle zu beweisen; ist nämlich der Satz wahr z. B. für den Fall, daß die Menge der T-variablen durch r, die Menge der P-variablen durch s neue Elemente sich erweitert — wir wollen diesen als Fall (r, s), bezeichnen — dann folgt die Wahrheit des Satzes für die Fälle $(r+1, s)$, $(r, s+1)$ aus der Wahrheit des Satzes für die Spezialfälle.

c) Wir beweisen den Satz für den Spezialfall a). Ist T_Γ leer, d. h. gibt es in Γ keine nicht herleitbare Primformel der Form $T\alpha$, so ist wiederum Γ^n mit Γ^n_Θ identisch, und die Behauptung des Satzes ist trivial.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Anzahl der Γ-Atome der Form $T\alpha$ von Γ^n p ($\geqq 1$) ist; es seien diese Atome $C_1, \ldots, C_p$. Wie es schon gezeigt wurde, Γ^n_Θ entsteht unter unseren Voraussetzungen aus Γ^n vermittels Ersetzen der Γ-Atome $C_1, \ldots, C_p$ durch die Konjunktion je zweier Θ-Atome — es seien diese der Reihe nach A_1 und $B_1, \ldots, A_p$ und B_p —. Wir definieren die Formeln $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_p$ wie folgt: Δ_0 sei mit Γ^n identisch, Δ_1 entstehe aus Δ_0 vermittels Ersetzen von C_1 durch $A_1 \wedge B_1$, überhaupt entstehe Δ_q aus Δ_{q-1} vermittels Ersetzen von C_q durch $A_q \wedge B_q$ $(q=1, 2, \ldots, p)$. Als „die Atome von Δ_q" (für die Wertung „W") betrachten wir die Θ-Atome $A_1, \ldots, A_q$ und $B_1, \ldots, B_q$, die Γ-Atome $C_{q+1}, \ldots, C_p$, ferner alle Γ-Atome von Γ^n, die nicht die Form $T\alpha$ haben. Es ist klar, daß (für den Nachweis unseres Satzes für den Spezialfall a)) der Beweis des Folgenden hinreicht: $w(\Delta_{q-1})\equiv 1$ ist dann und nur dann, wenn $w(\Delta_q)\equiv 1$ ist $(q=1, 2, \ldots, p)$. Die Wahrheit dieser Behauptung ist aber auf folgender einfacher Weise einzusehen:

d) Es sei die geordnete Menge der Atome Δ_{q-1} bzw. Δ_q $(D_1, \ldots, D_k)$ bzw. $(A, B, D_2, \ldots, D_k)$, d. h. entstehe Δ_q aus Δ_{q-1} vermittels Ersetzen von D_1 durch $A \wedge B$ (A und B sind voneinander und von jedem der $D_2, \ldots, D_k$ verschieden). Es sei $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ bzw. $(x, y, z_2, \ldots, z_k)$ ein Element des Definitionsbereichs von

$w(\Delta_{q-1})$ bzw. $w(\Delta_q)$. Es folgt aus den Regeln W1—4:

$$w(\Delta_{q-1};1,z_2,\ldots,z_k)\equiv w(\Delta_q;1,1,z_2,\ldots,z_k);$$
$$w(\Delta_{q-1};0,z_2,\ldots,z_k)\equiv w(\Delta_q;0,1,z_2,\ldots,z_k)\equiv$$
$$\equiv w(\Delta_q;1,0,z_2,\ldots,z_k)\equiv w(\Delta_q;0,0,z_2,\ldots,z_k).$$

Infolge dieser Identitäten, wenn im Wertebereich einer der $w(\Delta_{q-1})$, $w(\Delta_q)$ nur die Zahl 1 figuriert, so ist das auch für die andere der Fall. — Damit ist unser Satz für den Fall a) nachgewiesen.

Die Diskussion des Falles b) ist völlig analog mit der des Falles a).

Wir bemerken, daß aus dem Satz (8) unmittelbar seine nachstehende allgemeinere Form folgt: Gibt es für die Formel Γ eine Formel Δ, wovon Γ eine Konstituente ist und für welche $w(\Gamma_\Delta^n)\equiv 1$ ist, so ist für jede Formel Θ, wovon Γ eine Konstituente ist, $w(\Gamma_\Theta^n)\equiv 1$.

Im Folgenden wird die Behauptung „$w(\Gamma^n)\equiv 1$" manchmal in der Form „der Wert von Γ ist identisch 1" ausgedrückt; infolge des Satzes (8) kann daraus kein Mißverständnis entstehen.

(9) *Ist Γ ein Axiom, so ist $w(\Gamma^n)\equiv 1$.*

Beweis. Die Axiome B1—B8 und B10 sind herleitbare Primformeln, ihr Wert ist also nach W3 identisch 1. Die Normalformen der beiden Seiten den Äquivalenzen in den Axiomen B9 und B11 sind offenbar identisch (beiderseits kommen dieselben Variablen vor), woraus sofort folgt, daß ihr Wert identisch 1 ist. Die Wahrheit der Behauptung bestätigt sich unmittelbar auch bei den Axiomen B12—B19.

(10) *Der Wert einer unmittelbaren Folge von Formeln, die selbst identisch den Wert* 1 *haben, ist ebenfalls identisch* 1.

Beweis.

Fall der Schlußregel C1. Es seien die Werte von $\Gamma[\alpha]$ und von $\alpha=\beta$ identisch 1. (Jede Normalform der letzteren Formel ist ihr selbst identisch.)

Ist der Term α eine Konstituente eines konstanten Atoms $A[\alpha]$, so ist $A[\alpha]$ und wegen $\vdash\alpha=\beta$ auch $A[\beta]$ herleitbar, also ist auch $A[\beta]$ ein konstantes Atom. In diesem Fall hat der Umsatz des Terms keinen Einfluß auf den Wertebereich der Formel, es ist also auch der Wert von $\Gamma[\beta]$ identisch 1.

Ist dagegen α eine Konstituente eines nicht konstanten Atoms $\gamma[\alpha]=\delta$, so kann auch $\gamma[\beta]=\delta$ kein konstantes Atom sein (wäre es nämlich konstant, so wäre auf Grund des im vorigen Absatz Gesagten auch $\gamma[\alpha]=\delta$ konstant). Der Umsatz des Terms hat auch in diesem Fall keinen Einfluß auf den Wertebereich der Formel.

Es sei endlich α eine Konstituente einer nicht konstanten Primformel der Form $P\gamma[\alpha]$ oder $T\gamma[\alpha]$. Bilden wir die Normalform der Formeln $\Gamma[\alpha]$ und $\Gamma[\beta]$ bezüglich der Formel $\Gamma[\alpha]\wedge\Gamma[\beta]$; wir wollen sie kurz $\Gamma^*[\alpha^*]$ bzw. $\Gamma^*[\beta^*]$ bezeichnen. In beiden Formeln mit Sternen kommen alle Variablen von α und β vor, somit sind wegen $\vdash\alpha=\beta$ die perfekten disjunktiven (bzw. konjunktiven) Normalformen von $\gamma[\alpha]$ und $\gamma[\beta]$ identisch, die zwei Formeln mit Sternen sind also identisch. Wegen der Voraussetzung und des Satzes (8) ist der Wert von $\Gamma^*[\alpha^*]$ — und desgleichen der der damit identischen Formel $\Gamma^*[\beta^*]$ — identisch 1, und laut desselben Satzes ist auch der Wert von $(\Gamma[\beta])^n$ identisch 1.

Fall der Schlußregel C2. Es seien die Werte der Formeln $\Gamma[\Delta]$ und $\Delta \sim \Theta$ identisch 1. Bilden wir die Normalform beider Formeln bezüglich der Formel $\Gamma[\Delta] \wedge (\Delta \sim \Theta)$, wir wollen sie kurz $\Gamma^*[\Delta^*]$ und $\Delta^* \sim \Theta^*$ bezeichnen (Δ^*, bzw. Θ^* wird hier die in diesen Formeln statt Δ bzw. statt Θ auftretenden Konstituenten bezeichnen; offensichtlich tritt in beiden Formeln dasselbe Δ^* für Δ ein). Wiederum nach Satz (8) ist der Wert der Formeln $\Gamma^*[\Delta^*]$ und $\Delta^* \sim \Theta^*$ identisch 1. Letzteres kann aber in Folge der W-Regeln nur gelten, falls $w(\Delta^*) \equiv w(\Theta^*)$. In diesem Falle verändert aber das Umsetzen von Θ^* für Δ^* den Wertebereich von Γ^* nicht, es ist also auch der Wert von $\Gamma^*[\Theta^*]$ identisch 1, und laut Satz (8) auch der von $(\Gamma[\Theta])^n$.

Fall der Schlußregel C3. Voraussetzung: der Wert von Γ und $\Gamma \supset \Theta$ ist identisch 1. Es bezeichne Γ^* bzw. Θ^* die Normalform von Γ bzw. Θ bezüglich der Formel $\Gamma \supset \Theta$. Es ist klar, daß $(\Gamma \supset \Theta)^n$ identisch mit $\Gamma^* \supset \Theta^*$ ist. Laut Satz (8) ist der Wert von Γ^* und $\Gamma^* \supset \Theta^*$ identisch 1, folglich ist laut der W-Regeln auch der Wert von Θ^* identisch 1, laut Satz (8) also auch der von Θ^n.

Fall der Schlußregel C4. Voraussetzung: der Wert von $T\alpha$ ist identisch 1. Ist $T\alpha$ kein konstantes Atom, so hat seine Normalform die Gestalt $T\alpha_1 \wedge \ldots \wedge T\alpha_k$, wobei $T\alpha_1, \ldots, T\alpha_k$ verschiedene $T\alpha$-Atome sind; dann kann aber nach den W-Regeln der Wert von $T\alpha$ nicht identisch 1 sein. Also kann $T\alpha$ nur ein konstantes Atom, d. h. herleitbar sein. Dann ist nach C4 auch $O\alpha$ herleitbar, also auch ein konstantes Atom, sein Wert ist folglich identisch 1.

Korollar der Sätze (9) und (10): *Der Wert der Normalform einer beliebigen herleitbaren Formel ist identisch* 1.

(11) *Ist* $w(\Gamma^n) \equiv 1$, *so ist* Γ *herleitbar.*

Beweis. Es ist klar, daß unter den Voraussetzungen der Wert von Γ^a ebenfalls identisch 1 ist. Dann existiert Γ^r gewiß, denn — wie es im Satz (7) gezeigt worden ist — existierte Γ^r nicht, so wäre $\neg\Gamma$ herleitbar und darum nach obigem Korollar der Wert von $(\neg\Gamma)^n$ identisch 1, woraus der Wert von Γ^n identisch 0 wäre, im Gegensatz zur Voraussetzung. Ist Γ^r leer, so ist Γ schon nach (7) herleitbar. Ist Γ^r nicht leer, so ist sein Wert offenbar identisch 1, weil es aus Γ^a unter Weglassung „identisch 0-wertiger" Disjunktionsglieder und „identisch 1-wertiger" Konjunktionsglieder entstanden ist. Es seien $B_1, \ldots, B_r$ die in Γ^r zurückgebliebenen Γ-Atome. Es ist klar, daß Γ^r eine perfekte disjunktive Normalform des Aussagenkalküls über den Variablen $B_1, \ldots, B_r$ ist, und da ihr Wert identisch 1 ist, ist sie *vollständig*. Γ^r ist also *im Aussagenkalkül* herleitbar. Dann ist es aber offenbar auch im System $\boldsymbol{D}$ herleitbar, da ja das System $\boldsymbol{D}$ die Axiome und die Schlußregeln des Aussagekalküls enthält. Da $\vdash \Gamma^r \sim \Gamma$ ist, folgt aus der Herleitbarkeit von Γ^r auch die Herleitbarkeit von Γ.

Die Sätze (9), (10) und (11) in Betracht gezogen, zeigt es sich, daß eine Formel Γ im System $\boldsymbol{D}$ dann und nur dann herleitbar ist, wenn gemäß der Wertung „W" der Wert von Γ^n identisch 1 ist. Die Bildung der Normalform und die Wertung „W" ergibt also ein Entscheidungsverfahren.

Literatur

[1] G. H. v. WRIGHT, *An Essay in Modal Logic* (Amsterdam, 1951).
[2] A. R. ANDERSON, The Logic of Norms, *Logique et Analyse*, **2** (1958), 84–91.
[3] A. LENNART, A Binary Primitive in Deontic Logic, *Logique et Analyse*, **5** (1962), 90–97.
[4] B. PEKLO, Einige Bemerkungen zu den deontischen Systemen, etc., *Logique et Analyse*, **5** (1962), 98–123.
[5] H. A. SCHMIDT, *Mathematische Gesetze der Logik*. I (Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1960).

(Eingegangen am 15. Dezember 1964)

О КОМПОЗИЦИИ АВТОМАТОВ БЕЗ ПЕТЕЛЬ

Ф. ГЕЧЕГ (Сегед)

В работе [3] было доказано невозможность нахождения такого конечного набора автоматов[1]) $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(X, A_i, a_{i0}, X, \delta_i, \lambda_i)$, суперпозицией которых можно было бы индуцировать произвольное автоматное отображение ψ, отображающее свободную полугруппу $F(X)$ на себя. В настоящей работе доказывается аналогичное утверждение в случае произвольных автоматов и связи, являющейся более общей чем суперпозиция.

Предполагается знакомство читателя с определениями, обозначениями и результатами работы [3].

Структурной композиции автоматов (см. [1]) в абстрактной теории соответствует произведение автоматов в смысле В. М. Глушкова (см. [2]). Если в некоторую композицию автоматов входят автоматы $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r$ и только они (среди них могут быть и изоморфные), то мы говорим о композиции $\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_r$. Если данная композиция не содержит петлю (см. [1]), то можно ввести частичное упорядочение R в множество $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r\}$, по которому $\mathbf{A}_i > \mathbf{A}_j$ $(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \in \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_r\})$ тогда и только тогда, если не меньше чем один выходной канал автомата $\mathbf{A}_i$, хотя бы через некоторый логический элемент (см. [1]), соединен не меньше чем с одним входным каналом автомата $\mathbf{A}_j$. Композиции $\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_r$ без петель соответствует такое произведение, в котором вместо равенства $\varphi(a_1, \dots, a_r, x) = (x_1, \dots, x_r)$ имеет место равенство $\varphi(a_1, \dots, a_r, x) = (\dots, \varphi_k(a_{kj}, \dots, x), \dots)$ где компоненты a_{kj} элемента $(a_1, \dots, a_r)$ суть элементы автоматов $\mathbf{A}_{kj}$, больших автомата $\mathbf{A}_k$. Такое произведение мы назовем R-произведением.

Пусть $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$ произвольное конечное множество автоматов. Мы говорим о произведении $\mathbf{A}_1 \times \dots \times \mathbf{A}_k$ автоматов из множества $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$, если каждый автомат $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, \dots, r)$ $\mathfrak{A}$-изоморфен некоторому автомату из $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$. Как указано в работе [2], можно найти такое конечное множество $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$ автоматов, что произвольное автоматное отображение ψ индуцируется некоторым произведением автоматов из множества $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_v\}$. В настоящей работе показывается невозможность выбора такого конечного множества автоматов, с помощью которых можно было бы осуществить произвольное автоматное отображение при допущении только R-произведений.

---

[1]) Под автоматом понимается конечный автомат и под автоматным отображением — отображение, индуцируемое конечным автоматом.

Пусть $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r$—различные разбиения множества N на подмножества, непересекающиеся друг с другом, а π_0—разбиение, содержащее единственный класс. Будем считать, что $\pi_i < \pi_j$ $(\pi_i, \pi_j \in \{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_r\})$, если разбиение π_j мельче разбиения π_i. Разбиение π_i опережает разбиение π_j, если $\pi_i < \pi_j$ и нельзя найти такое разбиение $\pi_l (\in \{\pi_1, \ldots, \pi_r\})$, для которого $\pi_i > \pi_l > \pi_j$. В дальнейшем $m(\pi_i)$ $(i=1, \ldots, k)$ обозначает пересечение разбиений из $\{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k\}$, опережающих разбиение π_i.

Для доказательства высказанного утверждения нам понадобится следующая

Лемма. *Если автомат* $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X, A, a_0, Y, \delta, \lambda)$ $\mathfrak{A}$-*изоморфен* R-*произведению* $\mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_r$, *то для произвольного* $x_i (\in X)$ *и произвольного* $a (\in A)$ *автомат* $\mathbf{A}^{(a,i)}$ *имеет такое множество допустимых разбиений* π_k^* $(k=0, \ldots, s)$, *что число классов разбиения* π_k^* $(1 \leqq k \leqq s)$, *входящих в некоторый класс разбиения* $m(\pi_k^*)$ *не превосходит* l, *где* $l = \max\limits_{1 \leqq j \leqq r} \overline{\overline{A_j}}$; *далее* $\bigcap\limits_k \pi_k^*$ *тривиально.*

Лемма доказывается аналогично лемме работы [3], только определение допустимых разбиений здесь следующее: $(a_1, \ldots, a_r)$ и $(a_1', \ldots, a_r')$ принадлежат одному и тому же классу по π_j тогда и только тогда, если $a_j = a_j'$ и $a_{j_u} = a_{j_u}'$, где компоненты a_{j_u} и a_{j_u}' элементов $(a_1, \ldots, a_r)$ и $(a_1', \ldots, a_r')$ соотв. — элементы автоматов $\mathbf{A}_{j_u}$, больших автомата $\mathbf{A}_j$.

После этого покажем, что имеет место следующая

Теорема. *Не существует такого конечного множества* $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_v\}$, *что произвольное автоматное отображение индуцировалось бы некоторым* R-*произведением автоматов из* $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_v\}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное конечное множество автоматов $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_v\}$. Пусть $l = \max\limits_{1 \leqq j \leqq v} \overline{\overline{B_j}}$, $p (> l)$ простое число и пусть дана некоторая нетождественная подстановка $\begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ 1' \ldots n' \end{pmatrix}$.

Рассмотрим автомат $\mathbf{A} = \mathbf{A}(X, A, a_0, X, \delta, \lambda)$, где

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\}; \quad \overline{\overline{X}} = n (\geqq 2),$$

$$\delta(a_k, x_i) = \begin{cases} a_{k+1}, & \text{если } 0 \leqq k \leqq p-2 \\ a_0, & \text{если } k = p-1, \end{cases}$$

$$\lambda(a_k, x_i) = \begin{cases} x_i, & \text{если } 0 \leqq k \leqq p-2 \\ x_{i'}, & \text{если } k = p-1. \end{cases}$$

Пусть ψ—отображение, индуцируемое автоматом $\mathbf{A}$. Покажем, что никакой автомат $\mathbf{B} = \mathbf{B}(X, B, b_0, X, \delta', \lambda')$, индуцирующий ψ не $\mathfrak{A}$-изоморфен никакому R-произведению автоматов из $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_v\}$.

Как видно из работы [3], автомат $\mathbf{B}$ имеет такое состояние $b_0 q$ $(q \in F(X))$, что автомат $\mathbf{B}^{(b_0 q, i)}$ без выходных сигналов изоморфен следующему автомату $\mathbf{C}=\mathbf{C}(x_i, C, c_0, \delta'')$ без выходных сигналов:

$$C = \{c_0, c_1, \ldots, c_{tp-1}\}; \ t \geqq 1,$$

$$\delta''(c_j, x_i) = \begin{cases} c_{j+1}, & \text{если } 0 \leqq j \leqq tp-2, \\ c_0, & \text{если } j = tp-1. \end{cases}$$

Между допустимыми разбиениями автомата $\mathbf{C}$ и делителями числа tp можно установить взаимно однозначное соответствие так, что число классов разбиения π_i, соответствующего числу t_i $(t_i|tp)$ равно t_i. Действительно, для мощности f_i и числа t_i классов произвольного разбиения π_i автомата $\mathbf{C}$ имеют место $f_i|tp$ и $t_i|tp$. Далее, нетрудно показать, что $c_k \equiv c_l(\pi_i)$ $(c_k, c_l \in C)$ тогда и только тогда, если $k \equiv l (\operatorname{mod} t_i)$. Обратно, если $t_i|tp$ и π_i означает разбиение автомата $\mathbf{C}$, для которого $c_k \equiv c_l(\pi_i) \Leftrightarrow k \equiv l (\operatorname{mod} t_i)$, то π_i является допустимым и число классов по π_i равно t_i. Итак, наше утверждение доказано. В качестве результата получается также, что для разбиений π_i, π_j автомата $\mathbf{C}$ $\pi_i > \pi_j$ тогда и только тогда, если $t_i|t_j$.

Пользуясь этими результатами покажем, что для автомата $\mathbf{B}$ не выполняются условия леммы. Этим теорема будет доказана. Обозначим через $T = \{\pi_0^*, \pi_1^*, \ldots, \pi_s^*\}$ произвольное множество различных допустимых разбиений автомата $\mathbf{C}$, содержащее разбиение π_0^*, которое имеет единственный класс. В множестве T введем частичное упорядочение R, по которому $\pi_k^* > \pi_l^*$ $(\pi_k^*, \pi_l^* \in T)$ тогда и только тогда, если разбиение π_l^* мельче разбиения π_k^*. Пусть T_1 — множество максимальных элементов множества T и вообще T_i $(i \geqq 2)$ — множество максимальных элементов множества $T - \{T_1 + \ldots + T_{i-1}\}$. Предположим, что для произвольного $\pi_i^*(\in \{T - \pi_0^*\})$ — $g_i = \dfrac{f_i^*}{f_i} < p$, где f_i^* — мощность классов по $m(\pi_i^*)$, т. е. число g_i классов разбинения π_i^*, содержащихся в некотором классе $m(\pi_i^*)$, меньше числа p. Покажем, что в этом случае можно найти такое нетривиальное допустимое разбиение π^* автомата $\mathbf{C}$, что $\pi_i^* \geqq \pi^*$ для всех $\pi_i^*(\in T)$, то есть пересечение $\pi_0^* \cap \pi_1^* \cap \ldots \cap \pi_s^*$ — нетривиально. Действительно, в качестве π^* можно выбрать разбиение, соответствующее числу t. Проведем индукцию по индексам множеств T_i. Если $\pi_i^* \in T_1$, то $t_i|t$, поскольку $t_i|tp$ и $t_i < p$. Это значит, что $\pi_i^* > \pi^*$. Предположим, что утверждение уже доказано для всех индексов, меньших числа j и пусть $\pi_j^* \in T_j$. По индукционному предположению $m(\pi_j^*) \geqq \pi^*$. Таким образом, для числа t_j^* классов по $m(\pi_j^*)$ выполняется $t_j^*|t_j$, то есть $f_j^* = up$. Далее, $g_j|up$ и $g_j < p$, значит $p|f_j$ и следовательно $t_j|t$, то есть $\pi_j^* \geqq \pi$. Аналогичные утверждения имеют место для $\mathbf{B}^{(b_0 q, i)}$, так как автоматы без выходных сигналов $\mathbf{B}^{(b_0 q, i)}$ и $\mathbf{C}$ изоморфны. Тем самым теорема доказана. Утверждение теоремы значит, что нельзя найти такое конечное множество автоматов, что произвольное автоматное отображение индуцировалось бы в некоторой композиции без петель из этого множества.

Из доказательства видно, что если автоматы $\mathbf{B}_j$ $(j=1, \ldots, v)$ фигурирующие там имеют общее множество X входных и выходных сигналов, далее, они индуцируют взаимно однозначные отображения свободной полугруппы $F(X)$ на себя, и вместе с автоматом $\mathbf{B}_j$ в выбранные автоматы входит и обратный ему автомат, то получается доказательство теоремы работы [3].

Литература

[1] В. М. Глушков, *Синтез цифровых автоматов* (Москва, 1962).
[2] В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, *Успехи Матем. Наук*, **16**:5 (1961), 3—63.
[3] Ф. Гечег, О группе взаимно однозначных преобразований, определенных конечными автоматами, *Кибернетика*, 1 (1965), 37—40.

(Поступило 30 XI. 1964 г.)

Über ein Problem für Kreisscheibenfamilien

Von LAJOS STACHÓ in Szeged

Herrn Prof. L. Kalmár zum 60. Geburtstag gewidmet

§ 1. Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem folgenden geometrischen Problem: Ist ein System von abgeschlossenen Kreisscheiben in der Ebene derart gegeben, daß die Scheiben sich paarweise treffen, so gibt es im allgemeinen keinen Punkt der Ebene, der jeder Kreisscheibe angehört; nach einer Vermutung von T. GALLAI kann man jedoch immer 5 oder weniger Punkte in der Ebene so auswählen, daß jede der gegebenen Kreisscheiben mindestens einen dieser Punkte enthält, oder, anschaulich gesagt, daß diese Punkte die Kreisscheibenfamilie „erfassen". Diese Vermutung hat L. FEJES TÓTH in sein Buch [1]) aufgenommen. Dort findet man die Bemerkung, daß nach G. SZEKERES und P. UNGÁR 7 Punkte immer ausreichen. Aus mündlicher Mitteilung erfuhr ich später, daß A. HEPPES von 7 zu 6 herabsteigen konnte. [2])

Andererseits hat B. GRÜNBAUM [3]) ein System von 21 und später L. DANZER ein System von 10 Kreisen gefunden, das mit 3 Punkten nicht erfaßbar ist. (Es ist nicht schwer zu zeigen, daß je 5 Kreise durch 2, folglich je 8 durch 3 Punkte erfaßbar sind; DANZERS Konstruktion ist also ziemlich gut.)

In dieser Arbeit untersuchen wir die regelmäßigen erfassenden Punktsysteme und beweisen die Vermutung von GALLAI in der folgenden verschärften Form: Haben die Halbmesser der Kreisscheiben eine positive untere Schranke, so gibt es einen Kreis K_0 derart, daß die Eckpunkte eines in K_0 eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ($n \geqq 4$) und sein Mittelpunkt ein „inneres erfassendes Punktsystem" der gegebenen Kreisscheibenfamilie bilden, d. h. jede Kreisscheibe in ihrem Inneren wenigstens einen dieser Punkte enthält.

Damit wird die Existenz eines aus höchstens 5 Punkten bestehenden inneren erfassenden Punktsystems bewiesen. Das Problem, ob diese Anzahl sich noch verkleinern läßt, wird in dieser Arbeit offen gelassen.

---

[1]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953), S. 97.

[2]) L. DANZER bemerkt in einer Fußnote seiner Arbeit „Über Durchschnitteigenschaften n-dimensionaler Kugelfamilien", *J. reine angew. Math.*, **208** (1961), 181—203, daß er sogar zu 4 erfaßenden Punkten herabsteigen kann.

[3]) B. GRÜNBAUM, On intersection of similar sets, *Portugaliae Math.*, **18** (1958), 155—164.

§ 2. Definitionen und Hilfssätze

I. Unter *Kreisscheiben* verstehen wir gewöhnliche abgeschlossene Kreisscheiben, einzige Punkte, und abgeschlossene Halbebenen.

II. Unter einer *Familie* $\mathfrak{F}$ *von Kreisscheiben* in der euklidischen Ebene E verstehen wir ein aus endlich vielen Kreisscheiben $k_1, k_2, \ldots, k_n$ bestehendes System, welches mindestens ein beschränktes Element k° enthält, und deren je zwei Elemente einen nichtleeren Durchschnitt $k_i \cap k_j$ haben.

III. Haben drei Elemente k_1, k_2, k_3 einer Familie $\mathfrak{F}$ von Kreisscheiben keinen gemeinsamen Punkt, so bilden sie ein *Bogendreieck*. Dieses ist das durch die drei Kreisscheiben umfaßte Gebiet, genauer die Abschliessung der Menge $\{\mathfrak{K}[\bigcup_{i \neq j} (k_i \cap k_j)] - \bigcup_i k_i\}$, wobei $\mathfrak{K}M$ die konvexe Hülle der Menge M bedeutet.

IV. Unter einem *erfassenden* (bzw. *inneren erfassenden*) *Punktsystem* einer Familie $\mathfrak{F}$ von Kreisscheiben verstehen wir ein System von Punkten, welches die Eigenschaft hat, daß jede Kreisscheibe der Familie mindestens einen Punkt des Systems enthält (bzw. in ihrem Inneren enthält).

V. Die Minimalanzahl der Punkte der erfassenden (bzw. inneren erfassenden) Punktsysteme wird *Stichzahl* s_0 (bzw. *innere Stichzahl* s_0') der Familie genannt.

Nun werden wir für Kreisscheibenfamilien $\mathfrak{F}$, die mindestens ein Bogendreieck enthalten, einige Hilfssätze beweisen und einige weitere Definitionen einführen.

Hilfssatz 1. *Es seien k_1, k_2, k_3 Elemente einer Familie von Kreisscheiben, die ein Bogendreieck Δ bilden. Wenn ein weiteres Element k' dieser Familie das Bogendreieck Δ nicht enthält, lassen sich zwei von den Elementen k_1, k_2, k_3 derart auswählen, daß sie mit k' zusammen wieder ein Bogendreieck Δ' bilden.*

Beweis. Im Gegensatz zu unserer Behauptung setzen wir voraus, daß jede der Durchschnitte $k_1 \cap k_2$, $k_2 \cap k_3$ und $k_3 \cap k_1$ trifft. Es ist leicht einzusehen, daß die konvexe Hülle von Δ mit der konvexen Hülle der Ecken von Δ übereinstimmt, andererseits enthält die konvexe Hülle von drei Punkten, die der Reihe nach in $k_1 \cap k_2$, $k_2 \cap k_3$ und $k_3 \cap k_1$ liegen, alle Ecken des Bogendreiecks. Aus der Konvexität von k' folgt, daß sie — im Widerspruch zu unserer Voraussetzung — das Bogendreieck Δ enthält. Damit ist der Beweis fertig.

Der *Inkreis* eines Bogendreiecks hat offenbar eine Minimal- und eine Maximaleigenschaft. Er ist nämlich der *kleinste* unter den Kreisen, die alle „Seitenkreise" des Bogendreiecks treffen. Andererseits ist er der *größte* unter den im Bogendreieck liegenden Kreisen.

Auf den Inkreis eines Bogendreiecks bezieht sich der

Hilfssatz 2. *Es seien k_1, k_2 und k_3 drei Elemente einer Familie von Kreisscheiben $\mathfrak{F}$, die ein Bogendreieck Δ mit dem Inkreishalbmesser ϱ bilden. Ist k' eine Kreisscheibe der Familie, die den Inkreis k_0 von Δ nicht trifft, so kann man zwei unter den Kreisscheiben k_1, k_2 und k_3 derart auswählen, daß sie mit k' ein neues Bogendreieck Δ' bilden, welches einen Inkreishalbmesser $\varrho' > \varrho$ hat.*

Beweis. Sei B_i der Berührungspunkt von k_0 und k_i, und B_i' der zu B_i $(i = 1, 2, 3)$ diametral liegende Punkt am Rande von k_0. Ist d der Abstand von k_0 zu k', und ist r' der Halbmesser von k', so berührt der mit k' konzentrische Kreis vom Halbmesser $d+r'$ den Kreis k_0 in einem Punkt B^*.

Liegt B^* im Inneren des Kreisbogens $\widehat{B_2'B_3'}$, so werden wir zeigen, daß k', k_2 und k_3 ein Bogendreieck bilden, das den Kreis k_0 enthält, woraus unsere Behauptung schon folgt. Wir betrachten die Halbebenen h_2, h_3, h^*, die k_0 in den Punkten B_2, B_3, B^* vom Außen berühren. Da die Bögen $\widehat{B_2B_3}$, $\widehat{B_3B^*}$ und $\widehat{B^*B_2}$ kleiner als $\varrho\pi$ sind, bilden die Randgeraden der Halbebenen ein gewöhnliches Dreieck. Da $B^* \in \widehat{B_2'B_3'}$ ist, hat die k' enthaltende Halbebene h^* mit dem Durchschnitt von h_2 und h_3, der den gemeinsamen Teil von k_2 und k_3 enthält, keinen gemeinsamen Punkt. Die genannten Kreisscheiben bilden also ein Bogendreieck, w. z. b. w.

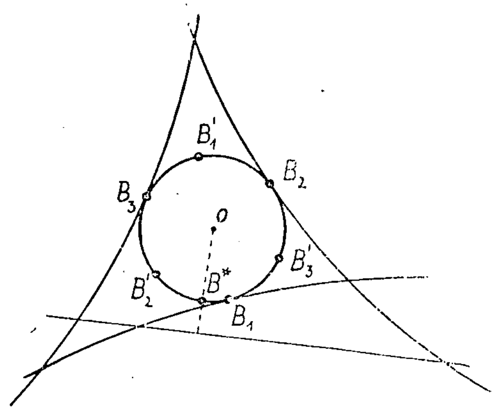

Abb. 1

VI. Wir nennen eine Kreisscheibe k zur Familie $\mathfrak{F}$ *adjungierbar*, wenn sie jede Kreisscheibe der Familie $\mathfrak{F}$ trifft, ungeachtet, ob sie zu $\mathfrak{F}$ gehört oder nicht.

Insbesondere ist also jedes Element von $\mathfrak{F}$ zu $\mathfrak{F}$ adjungierbar.

Hilfssatz 3. *Unter allen Kreisscheiben, die sich zur Familie $\mathfrak{F}$ adjungieren lassen, gibt es eine Kreisscheibe k_0^* von minimalem Halbmesser $\varrho_0^* < \infty$.*

Beweis. Wir betrachten alle Bogendreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, die von den Elementen von $\mathfrak{F}$ gebildet sind. Wir wählen von diesen ein Bogendreieck Δ^* aus, dessen Inkreis k_0^* den größten Halbmesser hat. Wir bezeichnen mit k_1^*, k_2^*, k_3^* die Kreisscheiben, die das Bogendreieck Δ^* bilden. Wir behaupten, daß k_0^* jede Kreisscheibe der Familie $\mathfrak{F}$ trifft. Im entgegengesetzten Fall können wir nämlich nach dem Hilfssatz 2 aus den Elementen k_1^*, k_2^*, k_3^* zwei so auswählen, daß sie mit k zusammen ein Bogendreieck Δ' bilden, dessen Inkreis größer ist, als der von Δ^*. Das widerspricht aber der Definition von Δ^*, da Δ' selbst ein Bogendreieck von $\mathfrak{F}$ ist.

Aus der Minimaleigenschaft des Inkreises folgt, daß k_0^* einen nicht größeren Halbmesser hat als k°, da ja auch k° alle „Seitenkreise" von Δ^* trifft. Folglich ist $\varrho^* < \infty$.

Aus der Minimaleigenschaft des Inkreises folgt weiter, daß k_0^* die kleinste unter allen Kreisscheiben der Ebene ist, die sich zur Familie $\mathfrak{F}$ adjungieren lassen. Denn diese müßen jedes Element von $\mathfrak{F}$, insbesondere auch k_1^*, k_2^*, k_3^* treffen, und unter allen Kreisscheiben, die die Kreisscheiben k_1^*, k_2^*, k_3^* treffen, ist k_0^* von minimalen Halbmesser. Daraus folgt weiter, daß k_0^* eindeutig bestimmt ist.

Es folgt auch, daß alle Halbmesser der Elemente von $\mathfrak{F}$ den Halbmesser von k_0^* übertreffen.

Hilfssatz 3 wurde damit bewiesen. Darüber hinaus haben wir folgendes bewiesen:

Hilfssatz 4. *Es gibt mindestens ein Bogendreieck Δ^*, das von gewissen Kreisscheiben $k_1^*, k_2^*, k_3^* \in \mathfrak{F}$ gebildet ist, dessen Inkreis die Kreisscheibe k_0^* ist.*

Wir adjungieren nun k_0^* zu $\mathfrak{F}$ und bezeichnen die so erhaltene Kreisscheibenfamilie mit $\bar{\mathfrak{F}}$. Auf Grund der Hilfssätze 3 und 4 führen wir für Kreisscheibenfamilien, die wenigstens ein Bogendreieck enthalten, die folgenden Definitionen ein:

VII. *Einheitskreis* einer Kreisscheibenfamilie $\bar{\mathfrak{F}}$ wird der Kreis k_0^* von minimalen Halbmesser ($r_0^* > 0$) genannt, der zu $\bar{\mathfrak{F}}$ gehört; also setzt man $r_0^* = 1$.

VIII. *Grundscheiben* der Familie $\bar{\mathfrak{F}}$ nennen wir drei Kreisscheiben $k_1^*, k_2^*, k_3^* \in \bar{\mathfrak{F}}$, die ein Bogendreieck bilden, welches den Einheitskreis k_0^* von $\bar{\mathfrak{F}}$ für Inkreis hat.

IX. Die Tangenten des Einheitskreises in den gemeinsamen Punkten mit den Grundscheiben bilden ein Dreieck: das ist das *Grunddreieck* von $\bar{\mathfrak{F}}$.

Um die Folgenden formulieren zu können, führt man einige Bezeichnungen ein. Die „größte" Seite (oder eine der größten Seiten) des Grunddreiecks sei mit a und der zugehörige Grundkreis mit k_1^* bezeichnet. *Man nimmt das rechtwinklige Koordinatensystem so an, daß der Punkt* $(0, 0)$ *der Mittelpunkt der Einheitsscheibe* k_0^* *von* $\bar{\mathfrak{F}}$ *und der Punkt* $(0, -1)$ *der Berührungspunkt von* k_0^* *und* k_1^* *ist.*

Da an der größten Seite des Grunddreiecks spitze Winkeln liegen, liegen die Berührungspunkte der Grundkreise mit dem Einheitskreis am Bogenviertel zwischen den Punkten $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bzw. $(0, 1)$ und $(-1, 0)$. Wir bezeichnen diese Grundkreise, der Reihe nach, mit k_2^* und k_3^*.

Wir werden später $P_0 = (0, 0)$ für einen der erfassenden Punkte wählen, deshalb werden wir die Kreisscheiben, die den Punkt P_0 als inneren Punkt enthalten, außer Acht lassen. Die weiteren Kreisscheiben von $\bar{\mathfrak{F}}$ werden in vier Klassen $\mathfrak{K}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ eingeteilt, und zwar gehöre zu $\mathfrak{K}_i$ jede Kreisscheibe, deren zu P_0 nächster Punkt im i-ten Koordinatenviertel liegt. Die eventuellen Zweideutigkeiten der Klasseneinteilung werden wir dadurch auflösen, daß wir diese Scheibe in beide möglichen Klassen einteilen.

Es gibt kein Koordinatenviertel, das mit jedem Grundkreis gemeinsame Punkte hat; das erste und das zweite Koordinatenviertel enthalten keinen Punkt aus k_1^*, das dritte keinen Punkt aus k_2^* und das vierte keinen Punkt aus k_3^*.

X. Wir betrachten die inneren Punkte des Parallelbereiches vom Radius 1 der Koordinatenviertel. Wir bezeichnen die Komplemente dieser Punktmengen der Reihe nach mit T_1, T_2, T_3, T_4, und ihre Begrenzungskurven mit g_1, g_2, g_3, g_4.

Dann ist $k_1^* \subseteqq T_1 \cap T_2$, $k_2^* \subset T_3$, $k_3^* \subset T_4$.

Wir betrachten die Elemente der Klasse $\mathfrak{K}_i$. Sie treffen jeden Grundkreis, insbesondere auch k_1^*. Da dieser Grundkreis ganz im Bereiche T_1 liegt, hat jedes Element von $\mathfrak{K}_1$ auch mit g_1 mindestens einen gemeinsamen Punkt. Ähnlicherweise wird g_i von jedem Element der Klasse $\mathfrak{K}_i$ getroffen. Eine beliebige Kreisscheibe $k(x_k, y_k; r_k)$ der Klasse $\mathfrak{K}_1$ hat also die folgenden Eigenschaften: ihr Mittelpunkt (x_k, y_k) liegt im ersten Koordinatenviertel $(x_k \geqq 0; y_k \geqq 0)$, ihr Halbmesser r_k ist größer als 1 [4]), sie trifft die Einheitsscheibe und die Kurve g_1.

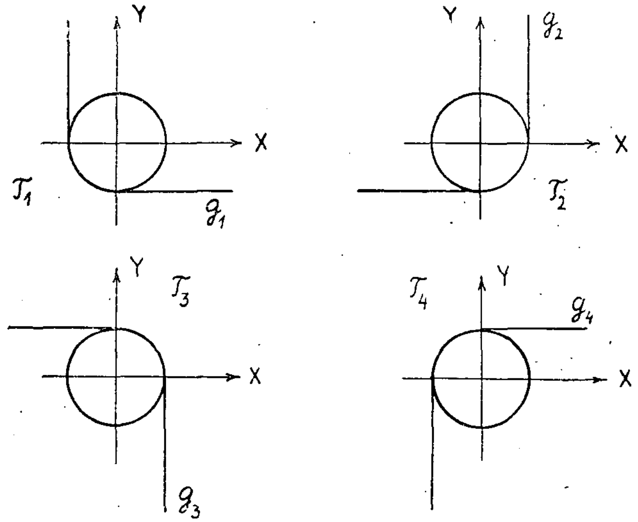

Abb. 2

Das System aller Kreise, die diese Eigenschaften besitzen, sei mit $\mathfrak{F}_1$ bezeichnet. $\mathfrak{F}_1$ ist eine Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$. Ähnlicherweise können wir die Klassen $\mathfrak{K}_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ zu Systemen $\mathfrak{F}_i$ erweitern.

XI. Unter dem *Erweiterungsystem* von $\overline{\mathfrak{F}}$ verstehen wir das System aller Kreisscheiben k in der Ebene, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

1. k trifft die Einheitskreisscheibe k_0^* der Familie $\overline{\mathfrak{F}}$;
2. P_0 ist in k nicht enthalten;
3. liegt der zu P_0 am nächsten liegende Punkt von k im i-ten Koordinatenviertel, so trifft k die Begrenzungskurve g_i $(i=1, 2, 3, 4)$;
4. der Halbmesser von k ist größer als 1.

§ 3. Erfassende Punktsysteme

Wir beweisen nun den unser Hauptergebnis enthaltenden

Satz 1. *Ist c eine positive untere Schranke für die Halbmesser der Elemente einer Kreisscheibenfamilie $\mathfrak{F}$, so gibt es einen Kreis K_0 in der Ebene, in den man (zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 4$) ein regelmäßiges n-Eck V_n so einschreiben kann, daß*

[4]) Diese Bedingung folgt daraus, daß die Kreisscheiben von $\mathfrak{K}_i$ alle Grundscheiben von $\mathfrak{F}$ treffen müßen.

jedes Element von $\mathfrak{F}$, wenn nicht den Mittelpunkt, so mindestens einen der Eckpunkte von V_n als inneren Punkt enthält. Für $n=4$, 5 ist dieses regelmäßige n-Eck auf spezielle Weise zu wählen. Für $n \geqq 6$ kann es beliebig gewählt werden.

Daraus folgt dann der

Satz 2. *Ist der Halbmesser jedes Elementes einer Kreisscheibenfamilie $\mathfrak{F}$ größer als $c(>0)$, so ist die innere Stichzahl s_0' von $\mathfrak{F}$ höchstens gleich 5. Wegen $s_0' \geqq s_0$ folgt hieraus für die Stichzahl s_0 jeder Kreisscheibenfamilie:*

$$s_0 \leqq 5.$$

Beweis. Es genügt den Satz 1 zu beweisen. Wir unterscheiden zwei Fälle je nachdem, ob es in der Familie $\mathfrak{F}$ kein oder mindestens ein Bogendreieck gibt.

Fall I: Es gibt kein Bogendreieck in der Familie. Dann haben die Elemente von $\mathfrak{F}$ laut dem Satz von HELLY [5]) einen gemeinsamen Punkt P_0. Demzufolge kommt man (falls die Halbmesser von $\mathfrak{F}$ eine positive untere Schranke c haben) sogar mit vier Punkten aus, die ein inneres erfassendes System bilden. Man nehme ein gleichseitiges Dreieck mit Schwerpunkt P_0 und mit Umkreisradius kleiner als c. Dann bilden P_0 und die Eckpunkte des Dreiecks ein inneres erfassendes Punktsystem von $\mathfrak{F}$. In diesem Falle ist also $s_0=1$, $s_0' \leqq 4$.

Fall II: Es gibt ein Bogendreieck in der Familie $\mathfrak{F}$. Zuerst ergänzen wir die Familie $\mathfrak{F}$ auf Grund des Hilfssatzes 3 und 4 zu einem System $\overline{\mathfrak{F}}$. Dann kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r_0^*=1$ gesetzt werden.

a) *Erfaßbarkeit mit 5 Punkten.*

Wir verwenden nun die Bezeichnungen des § 2 und betrachten laut Definition XI das Erweiterungssystem $\mathfrak{E}$ von $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$. Wir behaupten: *Die Punkte*

$$P_0=(0,0),\quad P_1=(\sqrt{3},0),\quad P_2=(0,\sqrt{3}),\quad P_3=(-\sqrt{3},0),\quad P_4=(0,-\sqrt{3})$$

liefern ein inneres erfassendes Punktsystem von $\mathfrak{E}$.

Das Quadrat P_1, P_2, P_3, P_4 enthält die Einheitsscheibe k_0^* in seinem Inneren, folglich liegt mindestens eine Ecke des Quadrates im Inneren jeder zu $\mathfrak{E}$ gehörenden Halbebene.

Wir behaupten, daß jedes Element aus $\mathfrak{E}_i$ von endlichem Halbmesser mindestens einen der Punkte P_0, P_i und P_{i+1} in seinem Inneren enthält ($P_5=P_1$). Aus Symmetriegründen genügt es die Behauptung für die Elemente von $\mathfrak{E}_1$ zu beweisen.

Wegen der Symmetrie bezüglich der Geraden $y=x$, genügt es nur jene Kreisscheiben von $\mathfrak{E}_1$ zu betrachten, deren Mittelpunkte in der unteren Hälfte des ersten Koordinatenviertels liegen. Es sei k eine solche Kreisscheibe. Nach der Bedingung 3 in Definition XI trifft k die Begrenzungskurve g_1, es folgt also, daß die Gerade P_0P_1 die Kreisscheibe k in einer Strecke D_1D_2 ($D_1 \neq D_2$) schneidet, da sie sonst

[5]) E. HELLY, Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver.*, **32** (1923), 175—176.

auch die zu ihrem Mittelpunkt nicht näher liegende Gerade P_0P_2 nicht überschreiten, folglich völlig im ersten Koordinatenviertel liegen würde. Wenn diese Strecke den Punkt P_1 in ihrem Inneren enthält, so ist das Innere der Kreisscheibe k erfaßt. Wir werden zeigen, daß das tatsächlich der Fall ist.

Wir bezeichnen mit k_m den k_0^* berührenden und durch die Punkte P_1 und P_2 gehenden Kreis, der, wie man leicht nachrechnen kann, keinen gemeinsamen Punkt mit g_1 hat. So gehört k_m nicht zur Menge $\mathfrak{E}_1$.

Gehört P_1 nicht zu k und ist $x_k \geqq \sqrt{3}$, so liegt D_1D_2 „rechts" von P_1. Da k die Kurve g_1 trifft, muß der Bogen $\widehat{D_1D_2}$ von k den Kreis k_m in zwei Punkten schneiden. Andererseits trifft aber k auch den Kreis k_0^*, enthält aber keinen der Punkte P_1, P_2. Folglich muß aber k den Kreis k_m auch innerhalb seines Bogens $\widehat{P_1P_2}$ treffen, was aber unmöglich ist.

Im anderen Fall, wenn also $x_k < \sqrt{3}$ ist und k den Punkt P_1 nicht enthält, kann k die Kurve g_1 nicht treffen, da die Höhe eines Kreissegments, dessen Radius mindestens 1 und dessen zugehörige Sehne höchstens 3 ist, immer kleiner als 1 ausfällt.

Somit haben wir den Satz 2 bewiesen. Es ist bemerkenswert, daß wir diesen Satz mittels der Erweiterungsmenge $\mathfrak{E}$ erhalten haben. Es sei noch bemerkt, daß man für den Umkreisradius des Quadrates $P_1, P_2, P_3\, P_4$ einen beliebigen Wert b mit

$$2+2\sqrt{2}-\sqrt{5+4\sqrt{2}} = 1{,}5639\ldots < b < 2$$

wählen kann, wie man leicht nachrechnen kann. Die erwähnte untere Schranke ist durch jenen Kreis bestimmt, der sowohl k_0^*, wie auch die zu g_1 gehörenden Halbgeraden berührt.

b) *Erfaßbarkeit mit 6 Punkten.*

Wir behalten das zur Kreisscheibenfamilie passend eingeführte Koordinatensystem und die übrigen Bezeichnungen von § 2. Wir schlagen um den Mittelpunkt $P_0\,(0;0)$ einen Kreis K_0 vom Halbmesser $\sqrt{3}$. Es seien

$$P_j' = \left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{10}+j\,\frac{2\pi}{5}\right), \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{10}+j\,\frac{2\pi}{5}\right)\right) \qquad (j=1, 2, \ldots, 5)$$

die Eckpunkte eines in K_0 eingeschriebenen regulären Fünfecks V_5. Es wird gezeigt, daß $P_0, P_1', P_2', \ldots, P_5'$ ein inneres erfassendes Punktsystem ist.

Zum Beweis führen wir verschiedene spezielle Kreisscheiben ein. Es bedeute s_j den durch die Punkte P_j' und P_{j+1}' $(P_6'=P_1')$ laufenden und k_0^* berührenden Kreis vom Halbmesser

$$r = \frac{4-2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{5}}{2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{5}-2} \approx 1{,}49216\ldots,$$

ferner bezeichnen s_j' bzw. s_j'' die Kreise vom Radius 1, die durch P_j' und P_0 bzw. P_{j+1}' und P_0 gehen und deren Mittelpunkte im Winkelraum $P_j'P_0P_{j+1}'$ $(j=1, 2, \ldots, 5)$ liegen.

Es ist leicht einzusehen, daß die Kreise s_j, s_j', s_j'' für $j=1, 2, 4, 5$ nicht zum Kreissystem $\overline{\mathfrak{F}}$ gehören können, weil sie mit der zugehörigen Bereichsgrenze g_i keinen gemeinsamen Punkt haben, wie man leicht nachrechnen kann. Auch die Kreisscheiben s_3, s_3', s_3'' gehören nicht zur Familie $\overline{\mathfrak{F}}$, da sie sonst jede Seite des

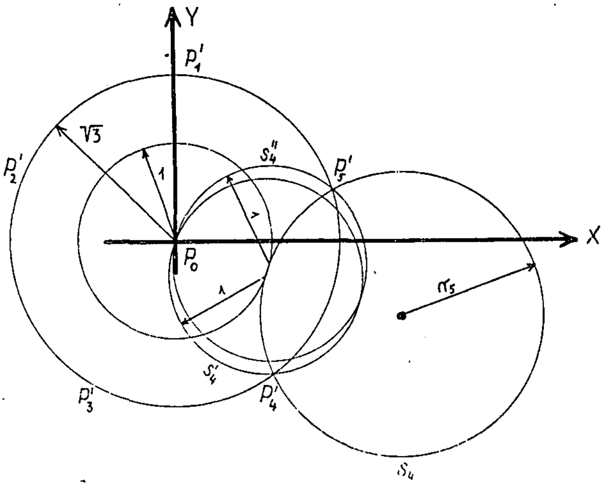

Abb. 3

Grunddreiecks treffen müßten. Das würde aber im Falle von s_3 bedeuten, daß der größte Winkel des Grunddreiecks höchstens dem Winkel der gemeinsamen äußeren Tangenten von k_0^* und s_3 gleich ist, also

$$2 \arcsin \frac{r-1}{r+1}$$

nicht übertrifft, und folglich kleiner als 23° ist, was aber offenbar unmöglich ist. Es folgt daraus, daß die in der konvexen Hülle von k_0^* und s_3 verlaufenden Kreise, also auch s_3' und s_3'', nicht zu $\overline{\mathfrak{F}}$ gehören können.

Wir werden zeigen, daß die Vereinigung

$$B_j := s_j \cup s_j' \cup s_j'' \qquad (j=1, 2, \ldots, 5)$$

jede Kreisscheibe vom Halbmesser $\varrho > 1$ bedeckt, deren Mittelpunkt M im Winkelraum $P_j' P_0 P_{j+1}'$ liegt, und die mindestens einen Punkt von k_0^* und keinen der Punkte P_0, P_j', P_{j+1}' enthält.

Der Rand von B_j wird durch die Punkte P_0, P_j', P_{j+1}' in drei Kreisbogen geteilt. Wir setzen voraus, daß es eine Kreisscheibe k' gibt, die unserer Behauptung widerspricht. Dann muß k' einen der erwähnten Randbogen in zwei Punkten schneiden. Da der Halbmesser von k' größer ist als der Radius vnn s_j' und s_j'', kann k' keinen der Bogen $\overparen{P_0 P_j'}$ bzw. $\overparen{P_j P_{j+1}'}$ schneiden. Aus dem Schneiden mit $\overparen{P_0 P_{j+1}'}$ würde z. B. folgen, daß der durch die Gerade $P_0 P_{j+1}'$ bestimmte größere

Bogen von k' insgesamt mit dem zu $P_0P'_{j+1}$ parallelen Durchmesser von k' in s''_j enthalten ist.

Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle je nachdem der Mittelpunkt M von k' im Dreieck $P_0P'_jP'_{j+1}$ liegt oder nicht. In jedem Fall muß k' den (kleineren) Bogen $\widehat{P'_{j+1}P'_j}$ von s_j treffen.

Im ersten Fall ist das klar; im zweiten folgt dies daraus, daß diesen Bogen auch Strecke MP_0 schneidet, die ja durch k_0^* und k' überdeckt wird. Wenn aber k' den (kleineren) Bogen $\widehat{P'_{j+1}P'_j}$ in zwei Punkten schneidet bzw. berührt, so kann sie mit dem anderen Bogen $\widehat{P'_jP_{j+1}}$ keinen gemeinsamen Punkt haben.

Daraus folgt, daß jede Kreisscheibe von $\mathfrak{F}$, deren Mittelpunkt im Winkelraum $P'_jP_0P'_{j+1}$ liegt, einen der Punkte $P_0P'_jP'_{j+1}$ in ihrem Inneren enthält. Wenn das nämlich nicht der Fall wäre, so würde der betreffende Kreis die zugehörige Grenze g_i nicht erreichen bzw. binnen der konvexen Hülle von k_0^* und s_3 verlaufen.

c) *Erfaßbarkeit mit $k \geqq 7$ Punkten.*

Wir behalten wieder das zur Kreisscheibenfamilie passend eingeführte Koordinatensystem und die übrigen Bezeichnungen von § 2.

Nun bezeichnen wir mit $P''_1, P''_2, \ldots, P''_n$ die Eckpunkte irgendeines in $K_0\{(x, y): x^2+y^2 = 3\}$ eingeschriebenen regelmäßigen n-Eckes V_n $(n \geqq 6)$ und behaupten, daß die Eckpunkte und der Mittelpunkt von V_n ein inneres erfassendes System für $\mathfrak{F}$ bilden.

Bei dem Beweis wird man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der Mittelpunkt von $k \in \mathfrak{F}$ im Kreise K_0 liegt, oder nicht.

Da der Halbmesser einer Kreisscheibe von $\mathfrak{F}$ größer als 1 ist, genügt es im ersten Fall zu beweisen, daß die Vereinigungsmenge der Kreisscheiben von Halbmesser $r=1$ um die Punkte $P_0P''_1, \ldots, P''_n$ den Kreis K_0 überdeckt. Da aber die Entfernung zweier benachbarten Eckpunkte von V_n mit wachsendem n monoton abnimmt, genügt es diese Behauptung für $n=6$ zu beweisen.

Es bezeichne nun V_6 ein in K_0 eingeschriebenes reguläres Sechseck. Eine kurze Rechnung zeigt aber, daß zwei um benachbarte Eckpunkte von V_6 mit Halbmesser 1 geschlagene Kreise einander am Kreis k_0^* schneiden, wodurch die erwähnte Überdeckung gesichert wird.

Im zweiten Fall betrachten wir die Kreisscheiben, deren Mittelpunkte außerhalb des Kreises K_0 im Winkelraum $P''_jP_0P''_{j+1}$ liegen. Jene Kreisscheibe, deren Rand die Punkte $P''_jP''_{j+1}(P''_{n+1}=P''_1)$ enthält und die Einheitsscheibe k_0^* berührt, hat den Halbmesser

$$r_n = \frac{4-2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{n}}{2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{n}-2}.$$

Da für $n \geqq 6$ sich daraus $r_n \leqq 1$ ergibt, folgt, daß die betrachteten Kreise, wenn sie P''_j und P''_{j+1} nicht enthalten, die Kreisscheibe k_0^* nicht erreichen können, weil sie sonst einen r_n nicht überschreitenden Halbmesser haben müßten.

d) *Folgerungen.*

Da die punktierte Kugel mit der Ebene homöomorph ist, erhält man die folgenden Sätze:

Satz 3. *Ist eine Kugelkappenfamilie* $\mathfrak{F}$ *an einer festen Kugel derart gegeben, daß je zwei Elemente von* $\mathfrak{F}$ *sich treffen, so ist die Stichzahl höchstens* 6.

Satz 4. *Ist c eine positive untere Schranke für die sphärischen Halbmesser der Elemente einer Kugelkappenfamilie* $\mathfrak{F}$, *deren Elemente sich paarweise treffen, so gibt es einen sphärischen Kreis K_0, in dem zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 4$ ein regelmäßiges Vieleck V_n so wählbar ist, daß der zum Breitenkreis K_0 gehörige Nordpol N und Südpol S mit den Eckpunkten von V_n zusammen ein inneres erfaßendes Punktsystem von* $\mathfrak{F}$ *bilden.*

(Eingegangen am 30. Dezember 1963)

On representing functions by Darboux functions

By JACK G. CEDER in Santa Barbara (California, U. S. A.)

In 1953 W. SIERPIŃSKI [7, 8] proved that each real-valued function on a connected, separable metric space could be expressed as (1) a sum of two functions each of which maps each closed, connected subset onto the real line R, and (2) a pointwise limit of a sequence of functions each of which maps each closed, connected subset onto R. These results were later generalized by S. MARCUS [6] to apply to a more general situation, where, in particular, the domain space is not topologized. However, when the domain space is a real interval, both of SIERPIŃSKI's results follow immediately from a general theorem of H. FAST [4] namely: If $\mathfrak{F}$ is a family of functions of cardinality $\leqq \mathbf{c}$, then there exists a function f such that $f+g$ is Darboux for each $g \in \mathfrak{F}$. (A function h is Darboux on a real interval if it maps connected sets onto connected sets.)

The main purpose of this article is to extend FAST's result in two directions. In one direction, we will extend FAST's result to the more general setting considered by S. MARCUS (see the paragraphs preceding Theorem 4). And, secondly, we extend FAST's result to apply to Baire functions and measurable functions on a real interval (see Theorems 1 and 2). From this latter extension we will deduce that when $\alpha > 1$ each Baire α (or measurable) function is both the sum of two Baire $\alpha+1$ (resp. measurable) Darboux functions and a pointwise limit of a sequence of Baire $\alpha+1$ (resp. measurable) Darboux functions. We will also show that when $\alpha > 1$ a Baire α (or measurable) function on an interval is the product of two Baire $\alpha+1$ (resp. measurable) functions each of which assumes each non-zero number on each subinterval.

Throughout the sequel unless otherwise specified the domain space is assumed to be a real interval I and measurable means Lebesgue measurable. For the definition of and facts about Baire Functions of class α, Borel sets of class α, etc. see KURATOWSKI [5]. We will consider cardinals to be ordinals which are not equipotent with smaller ordinals. Thus the cardinal $\mathbf{c}$ is the first ordinal equipotent with R. We will say that a set B is $\mathbf{c}$-dense in A if each open interval which intersects A contains $\mathbf{c}$ points of B.

We begin by invoking the following lemma proven in BRUCKNER, CEDER and WEISS [2]. The first part was first proven by BOBOC and MARCUS [1].

Decomposition Lemma. *If A is any $\mathbf{c}$-dense in itself subset of I, then A can be decomposed into $\mathbf{c}$ disjoint, non-void subsets each of which is $\mathbf{c}$-dense in A. Moreover, if A is any $\mathbf{c}$-dense in itself measurable set (or Borel set of class α), then*

A can be decomposed into countably many disjoint, non-void, subsets each of which is $\mathfrak{c}$*-dense in A and is measurable (resp. a Borel set of class* $\max(\alpha, 2)$*).*

Now we prove our main theorems, both of whose proofs are patterned after FAST's proofs.

Theorem 1. *Let $\mathscr{A}$ be any family of measurable functions having cardinality $\leqq \mathfrak{c}$. Then there exists a function f such that $f+g$ is measurable and Darboux for each $g \in \mathscr{A}$.*

Proof. By taking a Cantor set of zero-measure in each rational subinterval of I and then taking their union we obtain a $\mathfrak{c}$-dense subset A of I having zero-measure. According to the Decomposition Lemma we can then decompose A into disjoint, non-void sets $\{A_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ each of which is $\mathfrak{c}$-dense in A. Since A has zero-measure, each A_α will be measurable. Next enumerate the rational subintervals of I as $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ and further decompose each A_α into countably many disjoint $\mathfrak{c}$-dense, measurable subsets $\{A_{\alpha n}\}_{n=1}^{\infty}$. Now let $h_{\alpha n}$ be any function mapping $I_n \cap A_{\alpha n}$ onto R (the real line). Clearly $h_{\alpha n}$ is measurable. Now define h_α on A_α by putting $h_\alpha(x) = h_{\alpha n}(x)$, if $x \in I_n \cap A_{\alpha n}$ for some n, and $h_\alpha(x)=0$ elsewhere in A_α. Again h_α is measurable and each h_α maps $A_\alpha \cap J$ onto R for each subinterval J. Next define h on I by $h(x)=h_\alpha(x)$, if $x \in A_\alpha$, and $h(x)=0$ elsewhere in I. Since A has zero-measure h will be measurable.

Now let $\{y_\alpha\}_{\alpha \in R}$ be an enumeration of R and define the function k on I by $k(x)=y_\alpha$ if $x \in A_\alpha$ and $k(x)=0$ otherwise. Next represent $\mathscr{A}$ as $\{F(x,y): y \in R\}$ where F is a real-valued function defined on $I \times R$. Put $f(x) = h(x) - F(x, k(x))$. Now choose any $g \in \mathscr{A}$. Then $g(x) = F(x, y_\alpha)$ for some α. Consider the function $G(x) = f(x) + F(x, y_\alpha)$. To complete the proof we must show G is both Darboux and measurable.

To show G is Darboux, we note that $G(x)=h(x)=h_\alpha(x)$ for $x \in k^{-1}(y_\alpha) = A_\alpha$. But h_α clearly maps $A_\alpha \cap J$ onto R for each subinterval J, hence so does G. To show G is measurable, let M be any interval in R. Then $G \urcorner I - A$ is measurable since $G(x) = F(x, y_\alpha) - F(x, 0)$ on $I-A$. Now since A has zero-measure, it follows that $G^{-1}(M)$ is measurable. This finishes the proof.

Theorem 1 may not be true if $\mathscr{A}$ has cardinality $2^{\mathfrak{c}}$. For example, let $\mathscr{A}$ be all measurable functions. Then, if there were a function f such that $f+g$ were Darboux and measurable for each $g \in \mathscr{A}$, then by taking $g=0$ we would have that f is measurable. Then define $h(x) = -f(x)$ if $x \neq 0$ and $h(0) = -f(0)+1$. Then $h \in \mathscr{A}$ but $f+h$ fails to be Darboux.

Theorem 2. *Let $\mathscr{A}$ be a countable family of Baire α functions. Then there exists a function f such that $f+g$ is a Darboux function of Baire class* $\max(\alpha+1, 3)$ *for any $g \in \mathscr{A}$.*

Proof. First, using the Decomposition Lemma, we decompose I into countably many disjoint, non-void subsets $\{A_{mn}\}_{n,m=1}^{\infty}$ each of which is $\mathfrak{c}$-dense in I and is a Borel set of class 2. Now enumerate the open rational subintervals of I as $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$. Now pick a Baire function h_{nm} to map a subset of $I_m \cap A_{nm}$ onto R as follows: Since $I_m \cap A_{nm}$ is a Borel set of cardinality $\mathfrak{c}$, we can find a no-where dense perfect subset P_{nm} of it (see KURATOWSKI [3] p. 387). Next we can map P_{nm} continuously onto

[0, 1] by a function Φ. Then Φ maps the F_σ set $P_{nm}-\Phi^{-1}(0)-\Phi^{-1}(1)$ continuously onto (0, 1), which in turn is homeomorphic to R by a function Ψ. Hence, $\Psi\circ\Phi$ maps an F_σ subset, F_{nm}, of $I_m\cap A_{mn}$ onto R continuously. Now put $h_{nm}=\Psi\circ\Phi$.

Next put $A_n=\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}$ and define $h_n=\bigcup_{m=1}^{\infty} h_{nm}$. Then clearly h_n maps each $A_n\cap J$ onto R where J is any open subinterval of I. Define h by $h(x)=h_n(x)$, if $x\in A_{nm}$. Now if F is closed in R and contains 0 we have

$$h^{-1}(F)=\left(\bigcup_{n,m=1}^{\infty}(h_{nm}\urcorner F_{nm})^{-1}(F)\right)\cup\left(I-\bigcup_{n,m=1}^{\infty}F_{nm}\right)$$

which is a F_σ union a G_δ. Hence, at worst, $h^{-1}(F)$ for any closed set is an $F_{\sigma\delta}$, so h is a Baire 2 function.

Now let us enumerate $\mathscr{A}$ as $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ and enumerate the rationals in I as $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Define $F(x,y)=g_n(x)$, if $y=r_n$, and $F(x,y)=0$, if y is irrational. Now define k by $k(x)=r_n$, if $x\in A_n$, and put $f(x)=h(x)-F(x,k(x))$. Now let $g\in\mathscr{A}$. Then $g=g_n$ for some n so that $g(x)=F(x,r_n)$. Put $G(x)=g(x)+f(x)$. To complete the proof we need show that G is both Darboux and Baire of class $\max(\alpha+1,3)$.

To show G is Darboux we note that $G(x)=h_n(x)$ for x in the **c**-dense subset A_n of I. But h_n maps $A_n\cap J$ onto R for each open interval J, hence, so does G. To show G is Baire of class $\max(\alpha+1,3)$, we note that

$$(G\urcorner A_m)(x)=F(x,r_n)+f(x)=F(x,r_n)+h(x)-F(x,r_m).$$

Hence $G\urcorner A_m$ is of Baire class $\max(\alpha,2)$. Hence $G^{-1}(U)$ for any open set U is the countable union of Borel sets belonging to class $\max(\alpha,2)$. Hence, G is Baire of class $\max(\alpha,2)+1=\max(\alpha+1,3)$.

It is unkown whether or not we can improve upon the number $\max(\alpha+1,3)$ in both Theorems 2 and 3. As an aside, we note that the function h in the proof of Theorem 2 is a Baire 2 function which maps each subinterval onto R. Clearly this can not be accomplished by a Baire 1 function.

Now we have the obvious consequence

Corollary 1. *If $\mathscr{A}$ is a countable family of Baire functions, then there exists a function f such that $f+g$ is Darboux and Baire for each $g\in\mathscr{A}$.*

The above corollary may not be valid when $\mathscr{A}$ is uncountable. For example, by a similar example to that following Theorem 1, it cannot be valid when $\mathscr{A}$ is taken to be all Baire functions. We do not know, however, whether or not Theorem 2 itself can be valid for families $\mathscr{A}$ with cardinality **c**.

Corollary 2. *Every measurable (or Baire α) function is the sum of two Darboux, measurable functions (resp. Darboux functions of Baire class* $\max(\alpha+1,3)$*).*

Proof. Let g be any measurable function. Then put $\mathscr{A}=\{g,0\}$. Then according to Theorem 1 there exists a function f such that $f+g$ and f are Darboux and measurable. Hence g is the sum of the two Darboux, measurable functions $f+g$ and $-f$. Similarly with the case when g is Baire α.

The above corollary without the refinement of the Baire class has been proved also by Erdős [3].

Corollary 3. *Every measurable (or Baire α) function is the pointwise limit of a sequence of Darboux, measurable functions (resp. Darboux functions of Baire class* $\max(\alpha+1, 3)$*).*

Proof. Let g be any measurable function. Put $\mathscr{A}=\{ng\}_{n=1}^{\infty}$. So by Theorem 1 there will exist f such that $h_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)g+\frac{1}{n}f$ is Darboux and measurable for any n. But obviously $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ approaches g pointwise. Similarly with the case when g is Baire α.

Not every function can be the product of two Darboux functions, as was pointed out by S. Marcus in [4]. For example, it is easily seen that the Baire 1 function f defined by $f(0)=-1$ and $f(x)=+1$ for $x\neq 0$ cannot be the product of two Darboux functions. However, if a function f were always positive (or negative) then it can be factored into two Darboux functions. For then there are two Darboux functions g and h so that $\log f = g+h$. Hence, $f=e^g e^h$ where e^g and e^h are Darboux (and, moreover, are Baire of class $\max(\alpha+1, 3)$ or measurable if f is Baire α or measurable resp.). However, S. Marcus [4] has proven that each function on I is the product of two functions each of which assumes every non-zero number on each subinterval. We shall now give another proof of Marcus' result, but one which can easily be modified so as to apply to Baire α and measurable functions.

Theorem 3. *Each function is the product of two functions each of which assumes every non-zero number on each subinterval. Moreover, if the original function is measurable of Baire α, then the factoring functions can be taken to be measurable or of Baire class* $\max(\alpha+1, 3)$ *respectively.*

Proof. We first prove the result for an arbitrary function f on I and then note the modifications required for the measurable and Baire cases.

Let C be the closed set consisting of all points $x\in I$ such that each neighborhood of x contains $\mathbf{c}$ points of $f^{-1}(0)$. Let $A = C\cap f^{-1}(0)$. Then either A is empty or $\mathbf{c}$-dense in itself. In the latter case we decompose A into two $\mathbf{c}$-dense subsets A^1 and A^2 by the Decomposition Lemma. Then, again by the Decomposition Lemma we decompose A^1 into $\mathbf{c}$-dense subsets $\{A_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ and A^2 into $\mathbf{c}$-dense subsets $\{A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$. Now enumerate all open rational intervals which hit A as $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$. Let h_n and g_n be functions which map $A_n^1\cap J_n$ and $A_n^2\cap J_n$ respectively onto R. Next define $h_A(x)=h_n(x)$, if $x\in A_n^1\cap J_n$ for some n, and put $h_A(x)=0$ elsewhere in A. Also define $g_A(x)=g_n(x)$, if $x\in A_n^2\cap J_n$ for some n, and $g_A(x)=0$ elsewhere in A. Clearly $h_A(x)g_A(x)=f(x)$ for $x\in A$ and for any interval J hitting A both h_A and g_A map $J\cap A$ onto R.

Now consider $B = I-\bar{A}$. If B is non-empty it is $\mathbf{c}$-dense in itself. Hence we can decompose B into $\mathbf{c}$-dense subsets B^1 and B^2. Next decompose B^1 and B^2 into c-dense subsets $\{B_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ $(i=1, 2, \dots)$ respectively. Let $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ be all open rational intervals which hit B. Let h_n' and g_n' be functions mapping $B_n^1\cap J_n$ and $B_n^2\cap J_n$ respectively onto $R-\{0\}$. Next define h_B and g_B as follows:

$$\begin{aligned} h_B(x) &= h_n'(x) && \text{if } x\in B_n^1\cap J_n \text{ for some } n,\\ &= 1 && \text{if } x\in B_n^1-J_n \text{ for some } n,\\ &= 0 && \text{elsewhere in } B,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} g_B(x) &= g_n'(x) \text{ if } x\in B_n^2\cap J_n \text{ for some } n,\\ &= 1 \quad \text{ if } x\in B_n^2 - J_n \text{ for some } n,\\ &= 0 \quad \text{ elsewhere in } B. \end{aligned}$$

Then $h_B^{-1}(0)=B^2$ and $g_B^{-1}(0)=B^1$ and h_B maps $J\cap B^1$ and g_B maps $J\cap B^2$ onto either R or $R-\{0\}$ for any subinterval J which intersects B.

Now define h and g as follows:

$$\begin{aligned} h(x) &= h_A(x) &&\text{if } x\in A,\\ &= h_B(x) &&\text{if } x\in B^1,\\ &= f(x)/g_B(x) &&\text{if } x\in B^2,\\ &= 1 &&\text{if } x\in \bar{A}-A, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} g(x) &= g_A(x) &&\text{if } x\in A,\\ &= g_B(x) &&\text{if } x\in B^2,\\ &= f(x)/h_B(x) &&\text{if } x\in B^1,\\ &= f(x) &&\text{if } x\in \bar{A}-A. \end{aligned}$$

Clearly $f(x)=h(x)\,g(x)$ for each $x\in I$. Now let J be any subinterval of I. If J hits $\bar{A}$, it also hits A. But h_A and g_A map $J\cap A$ onto R; hence so do h and g. On the other hand if $J\subseteq B$, both h_B and g_B map $J\cap B$ onto R or $R-\{0\}$. Hence we have $R-\{0\}\subseteq g(J)\cap h(J)$.

Now suppose f is measurable. Since $A = C\cap f^{-1}(0)$, A must be measurable. From the fact that for any measurable set C of cardinality $\mathbf{c}$ and any set $D\subseteq R$ of cardinality $\mathbf{c}$ there exists a measurable function mapping C onto D, we can clearly make the functions $h_n, g_n, h_A, g_A, \ldots, h$ and g measurable.

Now suppose f is Baire α. Since $A = C\cap f^{-1}(0)$, A must be of Borel class α. Hence, the sets A_n^i can be taken to be of class $\max(\alpha, 2)$. Then we choose h_A, g_A, h_B and g_B similar to the h in the proof of Theorem 2, so that h_A, g_A, h_B and g_B are of class $\max(\alpha+1, 3)$. Since quotients of Baire functions of class $\leqq\beta$ are of Baire class $\leqq\beta$, both $f(x)/g_B(x)$ and $f(x)/h_B(x)$ are of Baire class $\max(\alpha+1, 3)$. It follows then that h and g will be of Baire class $\max(\alpha+1, 3)$. This finishes the proof of Theorem 3.

Let X and Y be arbitrary sets and $\mathscr{P}$ be a family of subsets of X. Then a function from X to Y has, according to MARCUS [6], "the Darboux property in the strong sense relative to $\mathscr{P}$ and Y", if $f(\mathscr{P})=Y$ for all $P\in\mathscr{P}$. For brevity let us call such a function $\langle\mathscr{P}, Y\rangle$-Darboux. If $\mathbf{m}$ is an infinite cardinal we will say that $\mathscr{P}$ is an $\mathbf{m}$-family if $\mathscr{P}$ and each member of $\mathscr{P}$ has cardinality $\mathbf{m}$. In [6] S. MARCUS has proved that if $\mathscr{P}$ is an $\mathbf{m}$-family of subsets of some set X, and Y is an additive group of cardinality $\mathbf{m}$, then each function f from X to Y is (1) the sum of two $\langle\mathscr{P}, Y\rangle$-Darboux functions and (2) the pointwise limit of a sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ of $\langle\mathscr{P}, Y\rangle$-Darboux functions, where for each $x\in X$ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ is eventually constant.

If one takes $Y=R$ and $\mathscr{P}$ to be the family of all infinite, closed, connected subsets of a connected, separable metric space X, then one gets the above cited results of SIERPIŃSKI. Another interesting case is when $Y=R$ and $\mathscr{P}$ is the family of all perfect subsets of $X=R^n$. In this case, S. MARCUS [6] also proved that each function is the product of two functions each of which maps each perfect subset onto either R or $R-\{0\}$.

Since each measurable function on I is continuous when restricted to some closed set of positive measure, there are no measurable functions which map each perfect subset of I onto R. Hence we can't extend Theorems 1 and 2 to give $\langle\mathcal{P}, R\rangle$-Darboux functions, where $\mathcal{P}$ is the family of all perfect subsets of I. However, it is clear that we can easily extend Theorems 1 and 2 to apply, for example, to $\langle\mathcal{C}, R\rangle$-Darboux functions where $\mathcal{C}$ is the family of all non-void open subsets of R^n.

Now we extend FAST's Theorem to apply to general $\langle\mathcal{P}, Y\rangle$-Darboux functions. Then, not only FAST's Theorem but also the above result of MARCUS follows immediately (in the same way corollary 2 followed from Theorem 1).

Theorem 4. *Let Y be an additive group of cardinality* $\mathbf{m}$. *Let $\mathcal{P}$ be an* $\mathbf{m}$*-family of sets. Let $\mathfrak{F}$ be a family of functions of cardinality $\leqq \mathbf{m}$ from $X = \bigcup\mathcal{P}$ into Y. Then, there exists a function f from Y to X such that $f+g$ is $\langle\mathcal{P}, Y\rangle$-Darboux for each $g\in\mathfrak{F}$.*

Proof. According to the Lemma of [6] we can decompose X into $\mathbf{m}$ disjoint sets $\{B_\lambda\}_{\lambda<\mathbf{m}}$ each of which meets each member of $\mathcal{P}$. Since $\mathbf{m}\times\mathbf{m}\times\mathbf{m}$ has the same cardinality as $\mathbf{m}$ we can reexpress this family as $\{B_{\alpha\beta\gamma}\}_{\alpha,\beta,\gamma<\mathbf{m}}$. Now put $A_{\alpha\beta} = \bigcup_{\gamma<\mathbf{m}} B_{\alpha\beta\gamma}$ for each $\alpha, \beta<\mathbf{m}$. Then each $A_{\alpha\beta}$ meets each $P\in\mathcal{P}$ in exactly $\mathbf{m}$ points. Now well order $\mathcal{P}$ as $\{P_\beta\}_{\beta<a}$. For $\alpha, \beta<\mathbf{m}$ let $f_{\alpha\beta}$ be a function mapping $A_{\alpha\beta}\cap P_\beta$ onto Y. Define $h(x)=f_{\alpha\beta}(x)$, if $x\in$ some $A_{\alpha\beta}\cap P_\beta$, and $h(x)=0$ otherwise.

Next well order Y as $\{y_\alpha\}_{\alpha<m}$ and put $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\mathbf{m}} A_{\alpha\beta}$. Define a function k from X to Y by $k(x)=y_\alpha$ if $x\in A_\alpha$. Now represent $\mathfrak{F}$, which we can assume without loss of generality to have cardinality $\mathbf{m}$, as $\{F(x, y): y\in Y\}$ where F is a function on $X\times Y$ to Y. Put $f(x) = h(x)-F(x, k(x))$. Now suppose $g\in\mathfrak{F}$. Then $g(x)=F(x, y_\alpha)$ for some α. Then $f(x)+g(x) = h(x)-F(x, k(x))+F(x, y_\alpha) = h(x)$ for all $x\in A_\alpha$. But h maps each $P\cap A_\alpha$ for $P\in\mathcal{P}$ onto Y. Hence, $g+f$ maps each member of $\mathcal{P}$ onto Y, which finishes the proof.

Theorem 4 does not imply MARCUS' result (2), but in case Y is, say, a normed linear space of cardinality $\mathbf{m}$, it clearly does imply that each function from $\bigcup\mathcal{P}$ to Y is a pointwise limit of a sequence of $\langle\mathcal{P}, Y\rangle$-Darboux functions, where $\mathcal{P}$ is an $\mathbf{m}$-family of sets.

Bibliography

[1] N. BOBOC and S. MARCUS, Sur la détermination d'une fonction par les valeurs prises sur un certain ensemble, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (3) **76** (1959), 151–159.

[2] A. BRUCKNER, J. CEDER and M. WEISS, On uniform limits of Darboux functions (to appear in *Coll. Math.*)

[3] P. ERDŐS, On two problems of S. Marcus concerning functions with the Darboux property, *Rev. Math. Pures Appl.*, **9** (1964), 803–804.

[4] H. FAST, Une remarque sur la propriété de Weierstrass, *Coll. Math.*, **7** (1959), 75–77.

[5] C. KURATOWSKI, *Topologie*, Vol. 1 (Warszawa. 1958).

[6] S. MARCUS, Sur la représentation d'une fonction arbitraire par des fonctions jouissant de la propriété de Darboux, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 489–494.

[7] W. SIERPIŃSKI, Sur une propriété de fonctions réelles quelconques, *Le Matematiche*, **8** (1958), 43–48.

[8] W. SIERPIŃSKI, Sur une propriété de fonctions réelles quelconques définies dans les espaces métriques, *Le Matematiche*, **8** (1953), 73–78.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
SANTA BARBARA

(Received October 15, 1964)

On spectral sets having connected complement

By DONALD SARASON in Berkeley (California, U. S. A.) [1])

1. Introduction

Let X be a compact subset of the plane with a connected complement. The present paper is based on the following result, which was discovered independently by FOIAŞ [3], LEBOW [8] and BERGER [1].

Theorem 0. *Every Hilbert space operator having X as a spectral set has a normal dilation whose spectrum is contained in ∂X.*

(We recall briefly a few definitions. If T is an operator [= bounded linear transformation] on a Hilbert space $\mathfrak{H}$, then a compact subset of the plane Y is called a *spectral set* for T if it contains the spectrum of T and satisfies

$$\|\varrho(T)\| \leqq \sup_{z \in Y} |\varrho(z)| \tag{1}$$

for all rational functions ϱ having no poles on Y. If Y has a connected complement then it suffices that (1) hold whenever ϱ is a polynomial. A *dilation* of T is an operator A which acts on a Hilbert space $\mathfrak{K}$ containing $\mathfrak{H}$ as a subspace and which satisfies $T^n P = PA^n P$ for all positive integers n, where P is the orthogonal projection in $\mathfrak{K}$ with range $\mathfrak{H}$. This dilation is called *minimal* if $\mathfrak{H}$ is contained in no proper reducing subspace of A. The dilation in Theorem 0 becomes unique to within isomorphism if one imposes on it the condition of minimality. A dilation A of T is called a Y-dilation if its spectrum is contained in ∂Y and if $\varrho(A)$ is a dilation of $\varrho(T)$ for every rational function ϱ having no poles on Y. If Y has a connected complement, then every dilation of T with spectrum on ∂Y is automatically a Y-dilation.)

In the present paper we use Theorem 0 to study operators having X as a spectral set. We eventually obtain a characterization of all such operators (Theorem 4). For the case where X is the closed unit disc, this characterization reduces to a well-known theorem (see LANGER [7] and SZ.-NAGY—FOIAŞ [12]) which states that every contraction operator on a Hilbert space has a decomposition into the direct sum of a unitary operator and a completely non-unitary contraction.

---

[1]) This research was performed while the author was supported by the National Science Foundation under a Postdoctoral Fellowship.

Our arguments depend largely on properties of the algebra $\mathbf{P}(\partial X)$, the space of functions on ∂X that can be uniformly approximated by polynomials. The required results about $\mathbf{P}(\partial X)$ are exposed in Section 2, where we also introduce certain notations which are retained throughout the paper. Section 2 is rather lengthy as it seemed best to give a fairly complete discussion. Section 3 is devoted to three lemmas concerning the invariant subspaces of normal operators with spectra on ∂X. The main results are in Section 4. These relate chiefly to direct sum decompositions of operators having X as a spectral set. We also discuss briefly a functional calculus for a subclass of these operators.

To conclude this section we obtain a useful lemma concerning semi-invariant subspaces. This result will be stated in somewhat greater generality that is needed for our immediate purposes. Suppose that $\mathbf{S}$ is a semi-group of operators on a Hilbert space $\mathfrak{K}$. Then a subspace $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{K}$ is called *semi-invariant* under $\mathbf{S}$ if the orthogonal projection P onto $\mathfrak{H}$ satisfies $PAPBP = PABP$ for all A and B in $\mathbf{S}$. Of interest in the present paper is the case where $\mathbf{S}$ consists of the non-negative integral powers of some fixed operator A; we then call a semi-invariant subspace of $\mathbf{S}$ a semi-invariant subspace of A. This notion bears an obvious relation to that of an operator dilation.

Lemma 0. *Let $\mathbf{S}$ be a semi-group of operators on a Hilbert space $\mathfrak{K}$. Then a subspace $\mathfrak{H}$ of $\mathfrak{K}$ is semi-invariant under $\mathbf{S}$ if and only if it has the form $\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}$ where $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are invariant subspaces of $\mathbf{S}$ such that $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$.*

Proof. The proof that $\mathfrak{H}$ is semi-invariant if it has the described form is straightforward and we therefore omit it. To prove the other half of the lemma, let $\mathfrak{H}$ be a semi-invariant subspace of $\mathbf{S}$ and assume without loss of generality that $\mathbf{S}$ contains the identity operator. Let $\mathfrak{M}$ be the smallest invariant subspace of $\mathbf{S}$ containing $\mathfrak{H}$, and let P and Q be the orthogonal projections onto $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{M}$ respectively. We can complete the proof by showing that the subspace $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{H}$ is invariant under $\mathbf{S}$, or equivalently, that

$$(Q-P)A(Q-P) = A(Q-P)$$

for all A in $\mathbf{S}$. From now on, let A denote a fixed operator in $\mathbf{S}$. As the equalities $QAQ = AQ$ and $QAP = AP$ clearly hold, it will be enough to show that $PAP = PAQ$. Now if B is in $\mathbf{S}$ and y is in $\mathfrak{H}$, then by semi-invariance,

$$PAPBy = PAPBPy = PABPy = PABy.$$

But by its definition, $\mathfrak{M}$ is the subspace spanned by all the vectors By with y in $\mathfrak{H}$ and B in $\mathbf{S}$. We may conclude that $PAPx = PAx$ for all x in $\mathfrak{M}$, and this implies the desired equality $PAP = PAQ$. The proof is complete.

The author is grateful to Professor Foiaş for pointing out the preceding proof, which is simpler than the one originally submitted. In spite of its elementary character, Lemma 0 seems to have been thus far overlooked.

2. The algebra $\mathbf{P}(\partial X)$

Let $\mathbf{P}(\partial X)$ denote the algebra of all functions on ∂X that can be uniformly approximated by polynomials. We give $\mathbf{P}(\partial X)$ the supremum norm. The set X is (with the usual abuse of language) the maximal ideal space of this algebra. We list below as propositions the needed properties of $\mathbf{P}(\partial X)$ and provide proofs where none exist in the literature. In terminology we follow WERMER [15] and HOFFMAN [6].

Proposition 1. *$\mathbf{P}(\partial X)$ is a Dirichlet algebra, that is, every real continuous function on ∂X can be uniformly approximated by the real parts of polynomials.*

This result is due to WALSH [14].

Let $G_1, G_2, G_3, \ldots$ be the components of the interior of X, and for each j choose a point a_j in G_j. Let m_j denote the (unique by Proposition 1) representing measure on ∂X for the functional of evaluation at a_j on $\mathbf{P}(\partial X)$. We denote by $\mathbf{H}^p(m_j)$, $p=1,2$, the closure of $\mathbf{P}(\partial X)$ in $\mathbf{L}^p(m_j)$, and by $\mathbf{H}_0^p(m_j)$ the subspace of $\mathbf{H}^p(m_j)$ consisting of those functions that are annihilated by m_j.

Proposition 2. *The measure m_j is supported by ∂G_j.*

Proof. Let m_j' be a representing measure on ∂G_j for the functional of evaluation at a_j on $\mathbf{P}(\partial G_j)$ (the algebra of functions on ∂G_j that can be uniformly approximated by polynomials). Since $\partial G_j \subset \partial X$, the measure m_j' also represents the functional of evaluation at a_j on $\mathbf{P}(\partial X)$. Therefore $m_j' = m_j$ by the uniqueness of the latter.

Proposition 3. *The non-degenerate Gleason parts of $\mathbf{P}(\partial X)$ are precisely the sets $G_1, G_2, G_3, \ldots$.*

Proof. It is easy to show that each point of ∂X constitutes by itself a Gleason part of $\mathbf{P}(\partial X)$. Hence the Gleason part containing a_j is contained in $X - \partial X$. By the Wermer embedding theorem [15], each Gleason part in a Dirichlet algebra is a continuous image of the open unit disc, and therefore is connected. Hence the Gleason part containing a_j is contained in G_j. On the other hand, it follows immediately from HARNACK's inequality that G_j is contained in a single Gleason part [2].

Proposition 4. *If $i \neq j$ then the measures m_i and m_j are mutually singular. The measures m_j contain no atoms.*

For the proof, see [4, Proposition 4].

Proposition 5. *If the finite complex Borel measure μ on ∂X annihilates $\mathbf{P}(\partial X)$, then μ has the form*

$$d\mu = \sum_j h_j \, dm_j,$$

where each h_j is a function in $\mathbf{H}_0^1(m_j)$ and

$$\sum_j \int |h_j| \, dm_j < \infty.$$

This is proved in [4].

For convenience in notation we henceforth let G stand for any one of the domains G_j, and we let a denote the corresponding point a_j and m the corresponding measure m_j. For z in G we let m_z denote the representing measure for the functional of evaluation at z on $\mathbf{P}(\partial X)$.

Proposition 6. *If z is in G then the measure m_z is absolutely continuous with respect to m and dm_z/dm is bounded. As z varies over any compact subset of G the derivatives dm_z/dm remain uniformly bounded.*

For the proof, see [2].

If f is a function in $\mathbf{H}^p(m)$ $(p=1,2)$ and $\{f_n\}_1^\infty$ is a sequence of functions in $\mathbf{P}(\partial X)$ converging in $\mathbf{L}^p(m)$ to f, then it follows from Proposition 6 that $\{f_n\}$ converges uniformly on every compact subset of G. The limit function is thus analytic in G and clearly depends only on f, not on the approximating sequence $\{f_n\}$. We denote the analytic function associated in this manner with f by f_G; obviously

$$f_G(z) = \int f\, dm_z, \qquad z \in G.$$

Let $\mathbf{H}^\infty(m)$ denote the weak-star closure of $\mathbf{P}(\partial X)$ in $\mathbf{L}^\infty(m)$. An equivalent definition is $\mathbf{H}^\infty(m) = \mathbf{H}^2(m) \cap \mathbf{L}^\infty(m)$. The space $\mathbf{H}^\infty(m)$ is easily seen to be an algebra. We let $\mathbf{H}^\infty(G)$ denote the algebra of all analytic functions f_G with f in $\mathbf{H}^\infty(m)$. A function in $\mathbf{H}^\infty(m)$ is called an *inner function* if it has unit modulus almost everywhere (m).

Proposition 7. *There is an inner function w in $\mathbf{H}^\infty(m)$ with the following properties.*

(i) *If f is in $\mathbf{H}^1(m)$ and $f_G(a)=0$, then f/w is in $\mathbf{H}^1(m)$.*

(ii) *The function w_G is a univalent map of G onto the open unit disk D, with $w_G(a)=0$.*

(iii) *If f is in $\mathbf{H}^2(m)$, then for z in G*

$$f_G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, w^n)[w_G(z)]^n.$$

The function w is unique to within a multiplicative constant of unit modulus.

These results are due to WERMER [15]. Actually, WERMER only proves (i) for functions f in $\mathbf{H}^2(m)$, but the result for functions in $\mathbf{H}^1(m)$ follows immediately.

From now on we let w stand for a fixed function with the properties described in the preceding proposition, and we define $\psi = w_G$, $\varphi = \psi^{-1}$. It is easy to see that $\{w^n\}_0^\infty$ is an orthonormal sequence in $\mathbf{H}^2(m)$.

For $0<r<1$ let Γ_r be the image under φ of the circle $C_r = \{z : |z| = r\}$ in the unit disc D, and let m_r be the measure on Γ_r obtained by transplanting normalized Lebesgue measure from C_r.

Proposition 8. $\lim_{r\to 1} m_r = m$ *in the weak-star topology of the dual of* $\mathbf{C}(\bar{G})$.

Proof. If f is in $\mathbf{P}(\partial X)$, then for $0<r<1$ we have

$$\int f\,dm_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f\circ\varphi)(re^{it})\,dt = f(\varphi(0)) = f(a).$$

Hence every weak-star cluster point m' of the net $\{m_r\}_{0<r<1}$ satisfies

$$\int f\,dm' = f(a)$$

for all f in $\mathbf{P}(\partial X)$. Also every weak-star cluster point of $\{m_r\}$ is clearly a positive measure supported by ∂G. Since the functional of evaluation at a on $\mathbf{P}(\partial X)$ has a unique representing measure, we may conclude that no measure other than m can be a weak-star cluster point of the net $\{m_r\}$. But every subnet of this net has a weak-star cluster point because the closed unit ball in $\mathbf{C}(\bar{G})^*$ is weak-star compact. This proves the proposition.

For f in $\mathbf{H}^p(m)$ $(p=1,2)$ we define the analytic function f_D in D by $f_D(z)=$ $=f_G(\varphi(z))$.

Proposition 9. *For $p=1,2$ the map $f\to f_D$ is an isometry of $\mathbf{H}^p(m)$ onto $\mathbf{H}^p(D)$*

Proof. If f is a function in $\mathbf{P}(\partial X)$ then

$$\int |f|^p\,dm = \lim_{r\to 1}\int |f|^p\,dm_r$$

by Proposition 8. On the other hand

$$\int |f|^p\,dm_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_D(re^{it})|^p\,dt, \qquad 0<r<1,$$

and as $r\to 1$ the right side here goes to the p-th power of the norm of f_D in $\mathbf{H}^p(D)$. Thus our map is an isometry of a dense subset of $\mathbf{H}^p(m)$ into $\mathbf{H}^p(D)$, and so is isometric on all of $\mathbf{H}^p(m)$. From part (iii) of Proposition 7 we see that the image of $\mathbf{H}^2(m)$ under the isometry contains all functions with square-summable Taylor coefficients and thus consists of all of $\mathbf{H}^2(D)$. Since $\mathbf{H}^2(D)$ is dense in $\mathbf{H}^1(D)$, the image of $\mathbf{H}^1(m)$ consists of all of $\mathbf{H}^1(D)$.

Actually Proposition 9 holds for general p, but that is superfluous to our present needs.

Proposition 10. *If the function f in $\mathbf{H}^1(m)$ does not vanish almost everywhere (m), then it is non-zero almost everywhere (m).*

Proof. When $f_G(a)\neq 0$ this follows from [6, Theorem 6. 4]. Suppose on the other hand that $f_G(a)=0$ but that f does not vanish almost everywhere. Then by Proposition 9 the function f_G is not identically zero, and therefore it has a zero of some finite order k at a. By Proposition 7, the function $g=f/w^k$ then belongs to $\mathbf{H}^1(m)$, and furthermore $g_G(a)\neq 0$. Hence g is non-zero almost everywhere, and since $|w|=1$ a. e. this proves the result for f.

Proposition 11. *The following topologies on* $\mathbf{H}^\infty(m)$ *are identical.*

($\mathfrak{W}_1$) *The weak-star topology on* $\mathbf{H}^\infty(m)$ *as a subspace of the dual of* $\mathbf{L}^1(m)$

($\mathfrak{W}_2$) *The weak operator topology on* $\mathbf{H}^\infty(m)$ *as an algebra of multiplication operators on* $\mathbf{L}^2(m)$

($\mathfrak{W}_3$) *The weak operator topology on* $\mathbf{H}^\infty(m)$ *as an algebra of multiplication operators on* $\mathbf{H}^2(m)$.

Proof. That ($\mathfrak{W}_1$) and ($\mathfrak{W}_2$) are identical follows immediately from their definitions. Also it is obvious that ($\mathfrak{W}_3$) is courser than ($\mathfrak{W}_2$). Now a basic neighborhood of the origin for ($\mathfrak{W}_2$) is a finite intersection of sets of the form

$$V(f, g; \varepsilon) = \left\{h \in H^\infty(m): \left|\int hf\bar{g}\, dm\right| < \varepsilon\right\},$$

where f and g are functions in $\mathbf{L}^2(m)$ and ε is a positive real number. It only remains to show that any such $V(f, g; \varepsilon)$ contains a neighborhood of the origin for ($\mathfrak{W}_3$), that is, a finite intersection of sets $V(f', g'; \varepsilon')$ with f' and g' in $\mathbf{H}^2(m)$. Consider first the special case where f and g are positive and bounded from zero. Then by [6, Theorem 5. 9] there is a function f' in $\mathbf{H}^2(m)$ such that $|f'|^2 = fg$ a. e. (m), and we have $V(f', f'; \varepsilon) = V(f, g; \varepsilon)$, as desired. In the general case we can write $f = (f_1 - f_2) + i(f_3 - f_4)$, $g = (g_1 - g_2) + i(g_3 - g_4)$, where f_j and g_j are positive and bounded from zero. We then have

$$\bigcap_{j,k=1}^{4} V(f_j, g_k; \varepsilon/16) \subset V(f, g; \varepsilon),$$

which reduces the general case to the special case just treated. The proof of the proposition is complete.

Proposition 12. (i) *The space* $\mathbf{H}^\infty(G)$ *consists of all bounded analytic functions in* G.

(ii) *The polynomials in* w *are weak-star dense in* $\mathbf{H}^\infty(m)$.

Proof. We consider the isometry of $\mathbf{H}^2(m)$ onto $\mathbf{H}^2(D)$ defined by $f \to f_D$ (see Proposition 9). This transformation at the same time sends $\mathbf{H}^\infty(m)$ onto a certain subalgebra of $\mathbf{H}^\infty(D)$, and in particular sends the function w onto the coordinate function in D (i. e. $w_D(z) \equiv z$). Also it is obvious that the transformation on $\mathbf{H}^\infty(m)$ is a homeomorphism relative to the weak topologies of $\mathbf{H}^\infty(m)$ and its image as algebras of multiplication operators on $\mathbf{H}^2(m)$ and $\mathbf{H}^2(D)$ respectively. Since, as is well-known, the polynomials are weak-star dense in $\mathbf{H}^\infty(D)$, the present proposition now follows from the preceding one.

Proposition 13. *Let* h *be a function in* $\mathbf{H}^1_0(m)$. *Then the measure* hdm *annihilates all rational functions having no poles in* $\bar{G}$.

Proof. By the same argument as used in the proof of Proposition 2, the measure m represents evaluation at a on the algebra of rational functions with no poles in $\bar{G}$. Now $h = \lim h_n$ where each h_n is a polynomial vanishing at a and the limit is in the norm of $\mathbf{L}^1(m)$. Hence if ϱ is a rational function without poles in $\bar{G}$, then

$$\int \varrho h\, dm = \lim \int \varrho h_n\, dm = \lim \varrho(a) h_n(a) = 0.$$

3. Normal operators with spectra on ∂X

Let $\mathfrak{K}$ be a Hilbert space and let A be a normal operator on $\mathfrak{K}$ whose spectrum is contained in ∂X. Let E be the spectral measure of A, and for each pair of vectors x, y in $\mathfrak{K}$ let (Ex, y) denote the Borel measure on ∂X that assigns to the Borel set S the mass $(E(S)x, y)$. For $j=1, 2, 3, \ldots$ let $\mathfrak{K}_j$ be the set of all x in $\mathfrak{K}$ such that (Ex, x) is absolutely continuous with respect to m_j, and let $\mathfrak{K}_0$ be the set of all x in $\mathfrak{K}$ such that (Ex, x) is singular with respect to every m_j. The sets $\mathfrak{K}_j$ are mutually orthogonal reducing subspaces of A and $\mathfrak{K} = \sum_0^\infty \oplus \mathfrak{K}_j$ [5, § 66] [2]). We denote by A_j the restriction of A to $\mathfrak{K}_j$ and by R_j the orthogonal projection in $\mathfrak{K}$ with range $\mathfrak{K}_j$, $j=0, 1, 2, \ldots$. For any two vectors x, y in $\mathfrak{K}$, the measure (ER_jx, y), $j>0$, is the absolutely continuous component of (Ex, y) with respect to m_j, while (ER_0x, y) is the singular component of (Ex, y) with respect to the family of measures $\{m_j : j=1, 2, 3, \ldots\}$.

Lemma 1. *Let $\mathfrak{M}$ be an invariant subspace of A. Then*

$$\mathfrak{M} = \sum_{j=0}^{\infty} \oplus R_j \mathfrak{M}. \tag{2}$$

Moreover the subspace $R_0\mathfrak{M}$ reduces A, and for $j>0$ the subspace $R_j\mathfrak{M}$ is invariant under $\varrho(A_j)$ for every rational functions ϱ having no poles in $\bar{G}_j$.

Proof. Let x be any vector in $\mathfrak{M}$. Then for y in $\mathfrak{M}^\perp$ we have

$$0 = (A^n x, y) = \int z^n \, d(E(z)x, y), \qquad n=0, 1, 2, \ldots,$$

and so the measure (Ex, y) annihilates $\mathbf{P}(\partial X)$. It thus follows from Propositions 5 and 13 that

(a) the measure (ER_0x, y) vanishes identically,

(b) the measure (ER_jx, y) annihilates all rational functions having no poles in $\bar{G}_j$, $j=1, 2, 3, \ldots$.

It follows from (a) and (b) that R_jx is orthogonal to $\mathfrak{M}^\perp$, and therefore that R_jx is in $\mathfrak{M}$ ($j=0, 1, 2, \ldots$). In other words, $\mathfrak{M}$ is invariant under every R_j. Since $\sum_0^\infty R_j = 1$, the decomposition (2) follows immediately.

From (a) it follows that $E(S)R_0x$ is orthogonal to $\mathfrak{M}^\perp$, and is therefore in $\mathfrak{M}$, for every Borel subset S of ∂X. This implies that A^*R_0x is in $\mathfrak{M}$, and hence in $R_0\mathfrak{M}$. Thus $R_0\mathfrak{M}$ reduces A.

Suppose finally that ϱ is a rational function without poles in $\bar{G}_j$ (j fixed, $j>0$). Then from (b) it follows that

$$(\varrho(A_j)R_jx, y) = \int \varrho \, d(ER_jx, y) = 0.$$

Therefore $\varrho(A_j)R_jx$ is in $R_j\mathfrak{M}$, and we may conclude that $R_j\mathfrak{M}$ is invariant under $\varrho(A_j)$.

---

[2]) We shall always write ∞ for the upper limit in summations over j, even though these are actually finite summations in cases where the interior of X has only finitely many components.

Lemma 2. *Suppose that none of the measures m_j are absolutely continuous with respect to E. Then every invariant subspace of A is a reducing subspace of A.*

Proof. Let $\mathfrak{M}$ be an invariant subspace of A, let x be any vector in $\mathfrak{M}$, and let y be any vector in $\mathfrak{M}^{\perp}$. Then the measure (Ex, y) is orthogonal to $\mathbf{P}(\partial X)$. Since none of the measures m_j are absolutely continuous with respect to (Ex, y), it follows from Propositions 5 and 10 that (Ex, y) vanishes identically. This implies that A^*x is orthogonal to $\mathfrak{M}^{\perp}$ and therefore in $\mathfrak{M}$. We may conclude that $\mathfrak{M}$ reduces A.

If $\mathfrak{H}$ is a subspace of $\mathfrak{K}$, then by the *projection of A onto $\mathfrak{H}$* we mean the operator T on $\mathfrak{H}$ defined by $Tx = PAx$, where P is the orthogonal projection in $\mathfrak{K}$ with range $\mathfrak{H}$. Thus A is a dilation of its projection onto $\mathfrak{H}$ if and only if $\mathfrak{H}$ is semi-invariant under A.

Lemma 3. *Assume that $\mathfrak{H}$ is a semi-invariant subspace of A such that the projection T of A onto $\mathfrak{H}$ is normal and has its spectrum on ∂X. Then $\mathfrak{H}$ reduces A.*

Proof. Let F be the spectral measure of T. Suppose x is a vector in $\mathfrak{H}$. Then for every non-negative integer n we have

$$\int z^n\, d(F(z)x, x) = (T^n x, x) = (A^n x, x) = \int z^n\, d(E(z)x, x).$$

Since $\mathbf{P}(\partial X)$ is a Dirichlet algebra, and since (Ex, x) and (Fx, x) are real measures, it follows that $(Ex, x) = (Fx, x)$.

Now by Lemma 0 we have $\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}$ where $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are invariant subspaces of A such that $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Let $\mathfrak{J}$ be the set of all x in $\mathfrak{H}$ such that none of the measures m_j are absolutely continuous with respect to (Ex, x). It follows from the observation of the preceding paragraph and from well-known properties of normal operators that $\mathfrak{J}$ is dense in $\mathfrak{H}$. Let x be any vector in $\mathfrak{J}$. Then it follows from Lemma 2 that the two subspaces $\bigvee_0^\infty A^n x$, $\bigvee_0^\infty A^{*n} x$ coincide with one another and with the smallest reducing subspace of A containing x. Since obviously

$$\bigvee_0^\infty A^n x \subset \mathfrak{M}, \quad \bigvee_0^\infty A^{*n} x \subset \mathfrak{N}^{\perp},$$

we may conclude that Ax and A^*x are in $\mathfrak{H}$. Hence we have shown that $A\mathfrak{J} \subset \mathfrak{H}$ and $A^*\mathfrak{J} \subset \mathfrak{H}$. This together with the density of $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{H}$ implies that $\mathfrak{H}$ reduces A.

4. On operators having X as a spectral set

Theorem 1. *Let the operator T on the Hilbert space $\mathfrak{H}$ have X as a spectral set. Then T has a decomposition*

$$T = \sum_{j=0}^{\infty} \oplus T_j, \tag{3}$$

where

(a) *T_0 is a normal operator whose spectrum is contained in ∂X and whose spectral measure is singular with respect to every m_j,*

(b) *for* $j>0$, T_j *has* $\bar{G}_j$ *as a spectral set,*

(c) *for* $j>0$, *the spectral measure of the minimal normal* $\bar{G}_j$*-dilation of* T_j *is absolutely continuous with respect to* m_j.

Proof. By Theorem 0, there is a minimal normal X-dilation A of T acting on a Hilbert space $\mathfrak{K}$ containing $\mathfrak{H}$. We carry over the notations introduced in the preceding section. By Lemma 0 we have $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}\ominus\mathfrak{N}$ where $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are invariant subspaces of A such that $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$. By Lemma 1

$$\mathfrak{M} = \sum_{j=0}^{\infty} \oplus R_j\mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N} = \sum_{j=0}^{\infty} \oplus R_j\mathfrak{N},$$

and therefore

$$\mathfrak{H} = \sum_{j=0}^{\infty} \oplus \mathfrak{H}_j$$

where $\mathfrak{H}_j = R_j\mathfrak{M}\ominus R_j\mathfrak{N}$. It is evident that each $\mathfrak{H}_j$ reduces T, and therefore (3) holds with $T_j = T|\mathfrak{H}_j$.

Consider a fixed $j>0$. By Lemma 1, if ϱ is a rational function with no poles in $\bar{G}_j$, then $R_j\mathfrak{M}$ and $R_j\mathfrak{N}$ are invariant under the operator $\varrho(A_j)$. As is easily seen, this implies that the projection of $\varrho(A_j)$ onto $\mathfrak{H}_j$ equals $\varrho(T_j)$. (In particular $\varrho(T_j)$ exists.) Property (b) now follows by Proposition 2. Moreover, it is clear that A_j is a minimal normal $\bar{G}_j$-dilation of T_j, and therefore (c) holds.

Finally, (a) follows immediately from the fact that $\mathfrak{H}_0$ reduces A (see Lemma 1).

If T is an operator having X as a spectral set, then we shall say that T is *X-pure* provided there is no invariant subspace $\mathfrak{H}'\neq\{0\}$ of T such that $T|\mathfrak{H}'$ is normal and has its spectrum on ∂X. For the case where X is the closed unit disk, the concept of X-purity reduces to that of complete non-unitarity. If T has X as a spectral set and is X-pure, then the operator T_0 of Theorem 1 must be trivial, and therefore T has the closure of the interior of X as a spectral set. This conclusion also follows from a result of Foiaş (see the last proposition in [3]).

Theorem 2. *Let T be a Hilbert space operator having X as a spectral set. Then T has a unique decomposition as the direct sum of an X-pure operator and a normal operator with spectrum on ∂X.*

Proof. By Theorem 0 there is a normal X-dilation A of T. If $\mathfrak{H}'$ is an invariant subspace of T such that $T|\mathfrak{H}'$ is normal and has its spectrum on ∂X, then $\mathfrak{H}'$ reduces A by Lemma 3. Therefore the span $\mathfrak{L}$ of all such subspace $\mathfrak{H}'$ is a reducing subspace of T such that $T'=T|\mathfrak{L}$ is normal and has its spectrum on ∂X. It follows immediately from the definition of $\mathfrak{L}$ that the operator $T''=T|\mathfrak{L}^\perp$ is X-pure, and thus the decomposition $T = T'\oplus T''$ is of the required form. The uniqueness of this decomposition follows immediately from the definition of $\mathfrak{L}$.

Theorem 3. *Let the operator T on the Hilbert space $\mathfrak{H}$ have X as a spectral set, and assume that T is X-pure. Let the subspaces $\mathfrak{H}_j$ of $\mathfrak{H}$, $j=1, 2, \ldots$, be as defined in the proof of Theorem 1. (It follows from the proof of Theorem 1 that $\mathfrak{H}_0$ is trivial.) Let A be a normal X-dilation of T acting on a Hilbert space $\mathfrak{K}$ containing $\mathfrak{H}$, and let E be the spectral measure of A. Then for any non-zero vector x in $\mathfrak{H}_j$, the measure (Ex, x) is mutually absolutely continuous with m_j.*

Proof. By Lemma 0 we have $\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}$ where $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are invariant subspaces of A such that $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Let x be a non-zero vector in $\mathfrak{H}_j$. We know from Theorem 1 that (Ex, x) is absolutely continuous with respect to m_j. Suppose that (Ex, x) is strictly absolutely continuous with respect to m_j. Then, letting $\mathfrak{H}'$ denote the smallest reducing subspace of A containing x, we have

$$\mathfrak{H}' = \bigvee_0^\infty A^n x = \bigvee_0^\infty A^{*n} x$$

by Lemma 2. Since obviously $\bigvee_0^\infty A^n x \subset \mathfrak{M}$ and $\bigvee_0^\infty A^{*n} x \subset \mathfrak{N}^\perp$, we have $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}$. Therefore $\mathfrak{H}'$ is a non-trivial reducing subspace of T such that $T|\mathfrak{H}'$ is normal and has its spectrum on ∂X. But this contradicts our hypotheses. We may conclude that (Ex, x) is not strictly absolutely continuous with respect to m_j.

Now let G denote a particular one of the domains G_j and let m denote the corresponding measure m_j. Consider an operator T on a Hilbert space $\mathfrak{H}$ which has $\bar{G}$ as a spectral set and which is $\bar{G}$-pure. Let A be a minimal normal $\bar{G}$-dilation of T. If h is a function in $\mathbf{H}^\infty(m)$, then since the spectral measure of A is absolutely continuous with respect to m (Theorem 3), the operator $h(A)$ is defined by the standard functional calculus for normal operators. We thus have a natural map of $\mathbf{H}^\infty(m)$ onto the operator algebra $\mathbf{H}^\infty(A) = \{h(A): h \in \mathbf{H}^\infty(m)\}$. This map is an algebra isomorphism and is a homeomorphism relative to the weak-star topology on $\mathbf{H}^\infty(m)$ and the weak operator topology on $\mathbf{H}^\infty(A)$. The last assertions follow readily from the fact that not only is the spectral measure of A absolutely continuous with respect to m, but also m is absolutely continuous with respect to the spectral measure of A (Theorem 3). Now each operator $h(A)$ in $\mathbf{H}^\infty(A)$ corresponds by projection to an operator on $\mathfrak{H}$, which we denote by $h(T)$. We thus have a natural map from $\mathbf{H}^\infty(m)$ onto the class of operators $\mathbf{H}^\infty(T) = \{h(T): h \in \mathbf{H}^\infty(m)\}$. It is easily seen that $\mathbf{H}^\infty(T)$ is an algebra, and that the map of $\mathbf{H}^\infty(m)$ onto $\mathbf{H}^\infty(T)$ is an algebra homomorphism and is continuous relative to the weak-star topology on $\mathbf{H}^\infty(m)$ and the weak operator topology on $\mathbf{H}^\infty(T)$. If ω is a bounded analytic function in G, then by Proposition 12 we have $\omega = h_G$ for some (unique) h in $\mathbf{H}^\infty(m)$, and we shall write $\omega(T)$ in place of $h(T)$.

Consider in particular the functions w, $\psi = w_G$, and $\varphi = \psi^{-1}$ (see Proposition 7 and the remarks following it). Since w is an inner function the operator $w(A)$ is unitary, and therefore the operator $S = \psi(T)$ is a contraction. The operators A and $w(A)$ have the same invariant subspaces since each is a weak limit of polynomials in the other (Proposition 12). This makes it clear that $w(A)$ is a minimal unitary dilation of S and that S is completely non-unitary. If ω is a bounded analytic function in the unit disc, then we have the composition law $\omega(S) = (\omega \circ \psi)(T)$. Indeed, this is easy to verify if ω is a polynomial, and therefore it holds in general by weak continuity. In particular $\varphi(S) = T$.

By combining the preceding observations with Theorems 1 and 2, we obtain the following characterization of those operators having X as a spectral set.

Theorem 4. *The Hilbert space operator T has X as a spectral set if and only if it has the form*

$$T = T_0 \oplus \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \varphi_j(S_j), \tag{4}$$

where T_0 is a normal operator with its spectrum on ∂X, the S_j are completely non-unitary contractions, and φ_j is for each j a conformal map of the unit disc onto G_j.

Actually we have only proved half of this theorem, the half which asserts that T has the form (4) if it has X as a spectral set. But the other half follows easily from well-known properties of contraction operators.

In conclusion we mention that if the operator T has X as a spectral set and is X-pure, then the above discussion shows us how to define $\omega(T)$ whenever ω is a bounded analytic function in the interior of X. The functional calculus used above is an extension of and was motivated by the functional calculus for contractions developed by Sz.-Nagy and Foiaş [11], [13], and by Schreiber [9], [10].

References

[1] C. A. Berger, *Normal dilations*, Doctoral Dissertation, Cornell University, 1963.

[2] E. Bishop, Representing measures for points in a uniform algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 121–122.

[3] C. Foiaş, Some applications of spectral sets. I, *Acad. R. P. Romîne, Stud. Cerc. Math.*, **10** (1959), 365–401 (in Romanian).

[4] I. Glicksberg and J. Wermer, Measures orthogonal to a Dirichlet algebra, *Duke Math. J.*, **30** (1963), 661–666.

[5] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity* (New York, 1957).

[6] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular Banach algebras, *Acta Math.*, **108** (1962), 271–317.

[7] H. Langer, Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 441–445.

[8] A. Lebow, On von Neumann's theory of spectral sets, *J. Math. Anal. and Appl.*, **7** (1963), 64–90.

[9] M. Schreiber, A functional calculus for general operators in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 108–118.

[10] M. Schreiber, Absolutely continuous operators, *Duke Math. J.*, **29** (1962), 175–190.

[11] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26–66.

[12] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251–259.

[13] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 130–167.

[14] J. L. Walsh, Über die Entwicklung einer harmonischen Funktion nach harmonischen Polynomen, *J. reine angew. Math.*, **159** (1928), 197–209.

[15] J. Werner, Dirichlet algebras, *Duke Math. J.*, **27** (1960), 373–381.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA,
BERKELEY

(Received November 14, 1964)

Sur les contractions de l'espace de Hilbert. XI
Transformations unicellulaires

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Une transformation linéaire bornée A de l'espace de Hilbert $\mathbf{H}$ s'appelle *unicellulaire* lorsque pour deux sous-espaces quelconques $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ de $\mathbf{H}$, invariants pour A, on a ou bien $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ ou bien $\mathbf{N} \supseteq \mathbf{M}$. Dans le cas où $\mathbf{H}$ est de dimension finie, ces sont les transformations qui correspondent à une matrice ayant une seule cellule de Jordan. Dans le cas d'un espace $\mathbf{H}$ de dimension infinie, BRODSKY, LIVŠITZ et d'autres (*voir* le rapport [1]) ont étudié le problème d'unicellularité surtout pour les transformations A dont la partie imaginaire $Q = (A - A^*)/2i$ est de rang fini (ou du moins de trace finie) et le spectre $\sigma(A)$ se réduit à un seul point. Ils ont établi notamment une condition suffisante pour l'unicellularité en termes du comportement de la résolvante de A au voisinage du seul point de $\sigma(A)$. *) Dans le cas où Q est de rang 1, ŠMULYAN [3] a caractérisé toutes les transformations A unicellulaires.

Le but de notre Note est d'étudier le problème d'unicellularité d'abord pour les contractions T de $\mathbf{H}$ et cela surtout dans l'hypothèse que les opérateurs de défaut $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ et $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$ sont de rang fini. De ces contractions on passe ensuite aux transformations A telles que Q est de rang fini et $Q \geqq O$. On aboutit ainsi à une caractérisation des transformations unicellulaires de ce type qui est intimement liée au comportement du semi-groupe de contractions engendré par $(iA)^{-1}$.

1. Contractions unicellulaires. Premières propositions

1. De la définition de l'unicellularité il résulte immédiatement que si T est unicellulaire dans $\mathbf{H}$, il en est de même pour T^* ainsi que pour toute restriction de T à un sous-espace invariant pour T. De plus il est manifeste que si T est unicellulaire, aucun sous-espace non banal de $\mathbf{H}$ ne peut réduire T. Comme pour tout $h \in \mathbf{H}$ $(h \neq 0)$ il y a un sous-espace séparable de $\mathbf{H}$, qui contient h et réduit T (notamment le sous-espace déterminé par les vecteurs Sh où S parcourt les produits finis formés de T et T^*), il résulte que si T est unicellulaire dans $\mathbf{H}, \mathbf{H}$ doit être séparable. Finalement, si $\dim \mathbf{H} > 1$, il n'y a dans $\mathbf{H}$ aucune transformation normale unicellulaire (conséquence immédiate du théorème spectral).

*) G. E. KISILEVSKY et M. S. BRODSKY viennent de démontrer aussi la nécessité de cette condition, leur article apparaîtra dans les *Izvestiya Akad. Nauk SSSR* (communication orale).

Envisageons une *contraction* T de $\mathbf{H}$, où $\dim \mathbf{H} > 1$. Soit $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1$ la décomposition canonique de $\mathbf{H}$ correspondant aux parties unitaire T_0 et complètement non-unitaire T_1 de T. Lorsque $\dim \mathbf{H}_0 > 1$, T_0 (étant unitaire) n'est pas unicellulaire dans $\mathbf{H}_0$, ce qui entraîne que T n'est pas unicellulaire dans $\mathbf{H}$. Lorsque $\dim \mathbf{H}_0 = 1$, $\mathbf{H}_0$ est un sous-espace non banal de $\mathbf{H}$ réduisant T, donc T n'est pas unicellulaire dans $\mathbf{H}$. Donc, si T est unicellulaire dans $\mathbf{H}$, on a nécessairement $\mathbf{H}_0 = \{0\}$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$, c'est-à-dire que T est complètement non-unitaire.

Ainsi il est justifié de se borner dans ce qui suit à l'étude des contractions complètement non-unitaires T dans des espaces $\mathbf{H}$ séparables et de dimension > 1.

La proposition suivante est beaucoup plus délicate:

Proposition 1. 1. *Aucune contraction T de classe C_{11} n'est unicellulaire.*[1])

Démonstration. Soit $T \in C_{11}$. En vertu du théorème 3 de [VII], T est quasi similaire à la partie „résiduelle" $U^0 = U|\mathbf{K}^0$ de la dilatation unitaire minimum U de T; U^0 est unitaire dans $\mathbf{K}^0$ et son spectre est absolument continu. Soit $E^0(\beta)$ la mesure spectrale de U^0, étalée sur la circonférence unité. Cette mesure étant absolument continue, on peut choisir deux sous-ensembles boréliens disjoints de la circonférence unité, soit β_1 et β_2, tels que $E^0(\beta_1)$ et $E^0(\beta_2)$ sont différentes des opérateurs O et I de $\mathbf{K}^0$. En vertu du théorème 3 de [IX] on y peut attacher des sous-espaces non banaux $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ de $\mathbf{H}$, invariants pour T et tels que $T_i = T|\mathbf{H}_i$ est quasi similaire à $U_i^0 = U^0|\mathbf{K}_i^0$ où $\mathbf{K}_i^0 = E^0(\beta_i)\mathbf{K}^0$ $(i = 1, 2)$. Si T était unicellulaire, $\mathbf{H}_1$ ou $\mathbf{H}_2$ devrait contenir l'autre: on peut supposer que

$$\mathbf{H}_1 \subseteqq \mathbf{H}_2. \tag{1.1}$$

En vertu des quasi similitudes il existe une application linéaire continue biunivoque X de $\mathbf{K}_1^0$ sur une variété linéaire dense dans $\mathbf{H}_1$, et une application linéaire continue biunivoque Y de $\mathbf{H}_2$ sur une variété linéaire dense dans $\mathbf{K}_2^0$, telles que

$$T_1 X = X U_1^0, \tag{1.2}$$

$$Y T_2 = U_2^0 Y. \tag{1.3}$$

Soit $Y_1 = Y|\mathbf{H}_1$. $Z = Y_1 X$ sera alors une application linéaire continue biunivoque de $\mathbf{K}_1^0$ dans $\mathbf{K}_2^0$. En vertu de (1. 2) on aura

$$Y_1 T_1 X = Y_1 X U_1^0 = Z U_1^0$$

et en vertu de (1. 1) et (1. 3)

$$Y_1 T_1 X = Y T_2 X = U_2^0 Y X = U_2^0 Y_1 X = U_2^0 Z,$$

donc $Z U_1^0 = U_2^0 Z$. Cela entraîne

$$Z E_1^0(\beta) = E_2^0(\beta) Z \tag{1.4}$$

[1]) Pour la définition des classes $C_{\alpha\beta}$ et C_0 des contractions *voir* [VII].

pour les mesures spectrales attachées aux transformations unitaires U_1^0 et U_2^0, et pour β borélien quelconque. Or, comme

$$E_i^0(\beta) = E^0(\beta)|\mathbf{K}_i^0 = E^0(\beta)|E^0(\beta_i)\mathbf{K}_i^0 = E^0(\beta\cap\beta_i)|\mathbf{K}_i^0,$$

on aura en particulier pour $\beta=\beta_2$:

$$E_1^0(\beta_2) = E^0(\beta_2\cap\beta_1)|\mathbf{K}_1^0 = O_{\mathbf{K}_1^0}, \quad E_2^0(\beta_2) = E^0(\beta_2\cap\beta_2)|\mathbf{K}_2^0 = I_{\mathbf{K}_2^0},$$

donc, en vertu de (1. 4),

$$O=Z.$$

Cela contredit ce que Z est biunivoque [2]). Cette contradiction prouve que T ne peut appartenir à la classe C_{11}.

2. Dans la suite on se restreindra à envisager des contractions complètement non-unitaires *T aux indices de défaut $\mathbf{d}_T$, $\mathbf{d}_{T^*}$ finis.* [3])

Pour pareille T, la restriction $T_1=T|\mathbf{H}_1$ à un sous-espace $\mathbf{H}_1\neq\{0\}$, invariant pour T, est de même type; on a notamment

$$\mathbf{d}_{T_1}\leqq\mathbf{d}_T \text{ et } \mathbf{d}_{T_1^*}\leqq\mathbf{d}_T+\mathbf{d}_{T^*};$$

voir [IX]*, proposition C.

Nous commençons par démontrer la suivante

Proposition 1. 2. *Soit T une contraction dans l'espace $\mathbf{H}$ de dimension infinie, aux indices de défaut finis et unicellulaire. Alors $T\in C_0$ et la fonction minimum $m_T(\lambda)$ de T est de la forme* [4])

$$\exp\left(a_T\frac{\lambda+\alpha_T}{\lambda-\alpha_T}\right) \quad \text{où} \quad a_T>0,\ |\alpha_T|=1. \tag{1. 5}$$

Démonstration. Comme T est unicellulaire et $\dim\mathbf{H}>1$, T est complètement non-unitaire et par conséquent a une triangulation de type

$$\begin{bmatrix} C_{\cdot 1} & * \\ O & C_{\cdot 0}\end{bmatrix}$$

où l'on admet aussi l'opérateur O de l'espace $\{0\}$ comme appartenant à toutes les classes $C_{\alpha\beta}$. Donc ou bien $T\in C_{\cdot 0}$, ou bien il existe un sous-espace non banal $\mathbf{H}_1$, invariant pour T et tel que $T_1=T|\mathbf{H}_1\in C_{\cdot 1}$. Dans le second cas, T_1 a aussi ses indices de défaut finis et on peut appliquer le théorème 2* de [IX]*, d'où il résulte qu'ou bien $T_1\in C_{11}$, ou bien tout point λ dans l'intérieur du cercle unité est une valeur propre de T_1: vu la proposition 1. 1 chacune de ces alternatives contredit ce que T_1 est unicellulaire. Donc, seul le cas $T\in C_{\cdot 0}$ est possible. Ce résultat, appliqué à T^* au lieu de T, donne que $T^*\in C_{\cdot 0}$, donc $T\in C_{0\cdot}$. Ainsi $T\in C_{00}$; en vertu de [VIII], n°6, cela entraîne $T\in C_0$.

[2]) Notons que $\mathbf{K}_2^0\neq\{0\}$; en effet, T_2 étant quasi similaire à U_2^0, $\mathbf{H}_2$ et $\mathbf{K}_2^0$ ont la même dimension.

[3]) Rappelons que $\mathbf{d}_T=\dim\mathbf{D}_T$ et $\mathbf{d}_{T^*}=\dim\mathbf{D}_{T^*}$ où $\mathbf{D}_T=\overline{D_T\mathbf{H}}$, $\mathbf{D}_{T^*}=\overline{D_{T^*}\mathbf{H}}$ (sous-espaces de défaut).

[4]) Rappelons que la fonction minimum n'est déterminée qu'à un facteur constant près, de module 1.

Soit $m_T(\lambda)$ la fonction minimum de T. Elle ne peut être factorisée en produit de deux facteurs intérieurs non constants, premiers entre eux [5]), parce que, au cas contraire, T admettrait des sous-espaces invariants non banaux $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$, tels que $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \{0\}$ (*voir* [VII], théorème 8 (iii)), ce qui est impossible vu que T est unicellulaire. Par conséquent, la factorisation canonique

$$B(z)\exp\left[-\oint_{|z|=1}\frac{z+\lambda}{z-\lambda}\,d\mu(z)\right] \qquad (\textit{voir}\ [\mathrm{VII}],\ \mathrm{n^o}\,6)$$

de la fonction intérieure $m_T(\lambda)$ se réduit ou bien à un seul facteur de Blaschke

$$\left(\frac{\lambda-a}{1-\bar{a}\lambda}\right)^n \tag{1.6}$$

où $|a|<1$ et n est un nombre naturel, ou bien au facteur exponentiel

$$\exp\left[-\oint_{|z|=1}\frac{z+\lambda}{z-\lambda}\,d\mu(z)\right] \tag{1.7}$$

où μ est une mesure non-négative singulière, non nulle, étalée sur la circonférence unité.

Dans le premier cas on a $(T-aI)^n = O$ et par conséquent, pour tout h fixé ($h \in \mathbf{H}$), les vecteurs $h, Th, \ldots, T^{n-1}h$ déterminent un sous-espace $\mathbf{M}(h)$ de dimension $\leqq n$, invariant pour T. Soit h_0 tel que $\mathbf{M}(h_0)$ est de dimension maximum et soit h un vecteur dans $\mathbf{H}$ n'appartenant pas à $\mathbf{M}(h_0)$. [6]) Aucun des sous-espaces $\mathbf{M}(h_0)$, $\mathbf{M}(h)$ ne contient alors l'autre, ce qui contredit ce que T est unicellulaire. Donc seul le cas (1. 7) est possible. Montrons que le support de la mesure μ est constitué d'un seul point $z=\alpha$, $|\alpha|=1$. En cas contraire il y aurait deux arcs complémentaires semi-ouverts de la circonférence unité, soit ω_1 et ω_2, tels que $\mu(\omega_i)>0$ $(i=1,2)$. En remplaçant dans le second membre de (1. 7) la mesure μ par ses restrictions à ω_1 et à ω_2, on obtient deux fonctions intérieures non constantes, premières entre elles, et telles que leur produit est égal à $m_T(\lambda)$. Or, comme nous l'avons déjà remarqué, telle factorisation est impossible vu que T est unicellulaire.

Par conséquent, $m_T(\lambda)$ est nécessairement de la forme (1. 5).

Un complément utile est fourni par la

Proposition 1. 3. *Soit T complètement non-unitaire et aux indices de défaut finis. Pour que T soit de classe C_0 et que $m_T(\lambda)$ ait la forme* (1. 5), *il faut et il suffit que le spectre $\sigma(T)$ soit constitué du seul point α_T, $|\alpha_T|=1$.*

Démonstration. La nécessité de la condition résulte immédiatement du théorème 7 de [VII]. Quant à sa suffisance, les corollaires à p. 125 de [V] assurent que $T \in C_{00}$; en vertu du théorème 5 de [VIII] on a donc $T \in C_0$. Comme $\sigma(T) = \{\alpha_T\}$ il résulte, toujours du théorème 7 de [VII], que $m_T(\lambda)$ doit avoir la forme (1. 5); en effet, c'est la seule fonction intérieure qui n'a pas de zéros dans l'intérieur du cercle unité et qui est analytique même sur la circonférence unité sauf au point α_T.

[5]) C'est-à-dire n'ayant pas de diviseur commun intérieur non constant.

[6]) Tel vecteur existe parce qu'on a supposé que $\mathbf{H}$ est de dimension infinie.

2. Deux lemmes et une application aux contractions unicellulaires

1. Nous avons besoin de quelques relations entre la fonction minimum d'une contraction T et les sous-espaces invariants pour T. Ces relations complètent celles démontrées dans [VII], n° 7.

Lemme 1. *Soit T une contraction de $\mathbf{H}$, de classe C_0, et soit $\mathbf{H}_1$ un sous-espace non banal de $\mathbf{H}$, invariant pour T. Soit*

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & * \\ O & T_2 \end{bmatrix}$$

la triangulation de T correspondant à la décomposition $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$. T_1 et T_2 appartiennent alors à la classe C_0; $m_{T_1}(\lambda)$ et $m_{T_2}(\lambda)$ sont des diviseurs de $m_T(\lambda)$, et $m_T(\lambda)$ est un diviseur de $m_{T_1}(\lambda)\, m_{T_2}(\lambda)$.

Démonstration. Toutes les assertions sauf la dernière ont été établies dans [VII], n° 7. 2. Pour démontrer que $m_T(\lambda)$ est un diviseur de $m_{T_1}(\lambda)\, m_{T_2}(\lambda)$, rappelons que pour toute fonction $u(\lambda) \in H^\infty$ on a

$$u(T_1) = u(T)|\mathbf{H}_1 \quad \text{et} \quad u(T_2) = P_2 u(T)|\mathbf{H}_2 \tag{2. 1}$$

où P_2 désigne la projection orthogonale sur $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_1$. Il s'ensuit que pour $h_1 \in \mathbf{H}_1$

$$(m_{T_1} m_{T_2})(T) h_1 = (m_{T_1} m_{T_2})(T_1) h_1 = m_{T_1}(T_1) m_{T_2}(T_1) h_1 = 0$$

et pour $h_2 \in \mathbf{H}_2$

$$0 = m_{T_2}(T_2) h_2 = P_2 m_{T_2}(T) h_2, \quad \text{donc} \quad h_1' = m_{T_2}(T) h_2 \in \mathbf{H}_1;$$

par conséquent

$$(m_{T_1} m_{T_2})(T) h_2 = m_{T_1}(T) m_{T_2}(T) h_2 = m_{T_1}(T) h_1' = m_{T_1}(T_1) h_1' = 0.$$

Ainsi $(m_{T_1} m_{T_2})(T) h = 0$ pour tout h appartenant à $\mathbf{H}_1$ ou à $\mathbf{H}_2$; comme $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$ il en résulte que $m_T(\lambda)$ est un diviseur de $m_{T_1}(\lambda) m_{T_2}(\lambda)$.

Lemme 2. *Soit $m_1(\lambda)$ un diviseur intérieur non constant de la fonction minimum $m_T(\lambda)$ d'une contraction T de $\mathbf{H}$, de classe C_0.*

$$\mathbf{H}_1 = \{h : h \in \mathbf{H},\, m_1(T) h = 0\} \tag{2. 2}$$

est alors un sous-espace invariant pour T, de plus $\mathbf{H}_1 \neq \{0\}$ et $T_1 = T|\mathbf{H}_1$ a sa fonction minimum égale à $m_1(\lambda)$. Lorsque, dans la factorisation $m_T(\lambda) = m_1(\lambda) m_2(\lambda)$, aucun des facteurs n'est constant, on a aussi $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_1 \neq \{0\}$ et $T_2 = (T^*|\mathbf{H}_2)^*$ a sa fonction minimum égale à $m_2(\lambda)$.

Démonstration. Dans le cas où $m_1(\lambda) = m_T(\lambda)$ on a $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ et il n'y a rien plus à démontrer. Reste le cas où la factorisation $m_T(\lambda) = m_1(\lambda) m_2(\lambda)$ n'est pas banale. Le fait que $\mathbf{H}_1$ est alors un sous-espace non banal de $\mathbf{H}$, invariant pour T, a été démontré dans [VII], n° 7, mais là on n'a établi les relations $m_{T_1}(\lambda) = m_1(\lambda)$, $m_{T_2}(\lambda) = m_2(\lambda)$ que dans l'hypothèse additionnelle que les facteurs intérieurs $m_1(\lambda), m_2(\lambda)$ sont premiers entre eux. Le raisonnement suivant porte sur le cas général.

En vertu de (2. 1) et de la définition (2. 2) de $\mathbf{H}_1$, on a $m_1(T_1)=m_1(T)|\mathbf{H}_1=O$. Par conséquent $m_{T_1}(\lambda)$ est un diviseur de $m_1(\lambda)$, donc $m_1(\lambda)=m_{T_1}(\lambda)p(\lambda)$ avec un facteur intérieur $p(\lambda)$.

D'autre part, pour tout $h\in\mathbf{H}$ on a $m_1(T)m_2(T)h=m_T(T)h=0$, donc $h'=m_2(T)h\in\mathbf{H}_1$. En appliquant (2. 1) on obtient pour $h\in\mathbf{H}_2$

$$m_2(T_2)h=P_2m_2(T)h=P_2h'=0.$$

Ainsi, $m_2(T_2)=O$ et par conséquent $m_{T_2}(\lambda)$ est un diviseur de $m_2(\lambda)$, donc $m_2(\lambda)=m_{T_2}(\lambda)q(\lambda)$ avec un facteur intérieur $q(\lambda)$.

En réunissant ces résultats nous obtenons

$$m_T(\lambda)=m_1(\lambda)m_2(\lambda)=m_{T_1}(\lambda)p(\lambda)m_{T_2}(\lambda)q(\lambda)=m_{T_1}(\lambda)m_{T_2}(\lambda)\cdot p(\lambda)q(\lambda).$$

D'autre part, $m_T(\lambda)$ est, en vertu du lemme 2. 1, un diviseur de $m_{T_1}(\lambda)m_{T_2}(\lambda)$. Par conséquent on a nécessairement $p(\lambda)q(\lambda)=1$, donc $p(\lambda)=1$, $q(\lambda)=1$ et par suite $m_{T_1}(\lambda)=m_1(\lambda)$, $m_{T_2}(\lambda)=m_2(\lambda)$ (tout cela, bien entendu, à des facteurs constants près, de module 1).

Lemme 2 se trouve démontré.

Nous allons appliquer ce lemme au cas des fonctions intérieures

$$u_a(\lambda) = \exp\left(a\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) \qquad (a\geqq 0). \tag{2. 3}$$

Pour a donné, les seuls diviseurs intérieurs de $u_a(\lambda)$ sont les fonctions $u_b(\lambda)$ où $0\leqq b\leqq a$.

Proposition 2. 1. *Soit T une contraction dans l'espace $\mathbf{H}$, de classe C_0 et telle que $m_T(\lambda)=u_{a_T}(\lambda)$ où $a_T>0$. Les sous-espaces*

$$\mathbf{H}_a=\{h\colon h\in\mathbf{H},\, u_a(T)h=0\} \qquad (0\leqq a\leqq a_T) \tag{2. 4}$$

sont invariants pour T et on a

$$\mathbf{H}_0=\{0\};\quad \mathbf{H}_{a_1}\subsetneqq\mathbf{H}_{a_2}\ \ \textit{pour}\ \ 0\leqq a_1<a_2\leqq a_T;\quad \mathbf{H}_{a_T}=\mathbf{H}; \tag{2. 5}$$

$$\bigcap_{x>a}\mathbf{H}_x=\mathbf{H}_a \quad \textit{pour} \quad 0\leqq a<a_T; \tag{2. 6}$$

$$\overline{\bigcup_{x<a}\mathbf{H}_x}=\mathbf{H}_a \quad \textit{pour} \quad 0<a\leqq a_T. \tag{2. 7}$$

Donc les projections orthogonales correspondantes E_a forment une famille spectrale dans l'intervalle $[0, a_T]$, strictement croissante et continue. Si de plus T est unicellulaire, il n'y a pas d'autres sous-espaces invariants pour T.

Démonstration. Posons $T_a=T|\mathbf{H}_a$ $(0\leqq a\leqq a_T)$. D'après le lemme 2 on a $m_{T_a}(\lambda)=u_a(\lambda)$ pour tout $a>0$, d'où il s'ensuit en particulier $T_{a_1}\neq T_{a_2}$ et par conséquent $\mathbf{H}_{a_1}\neq\mathbf{H}_{a_2}$ pour $a_1\neq a_2$. Les autres assertions (2. 5) sont manifestes.

Passons à (2. 6). Puisque $\mathbf{H}_a\subset\mathbf{H}_x$ pour $a<x$, (2. 6) veut dire que si $u_x(T)h=0$ pour un $h\in\mathbf{H}$ et pour tout $x>a$, on a aussi $u_a(T)h=0$. Or, cela s'ensuit de ce que, lorsque $x\to a$, $u_x(\lambda)$ tend vers $u_a(\lambda)$ dans tout point de l'ensemble $\{\lambda\colon|\lambda|\leqq 1,\, \lambda\neq 1\}$, en y restant bornée en module par 1, et que par conséquent $u_x(T)\to u_a(T)$.

Pour démontrer la relation (2. 7), observons d'abord que le premier membre de (2. 7), que nous voulons désigner pour le moment par $\mathbf{H}'_a$, est un sous-espace de $\mathbf{H}_a$ invariant pour T. Faisons l'hypothèse $\mathbf{H}''_a = \mathbf{H}_a \ominus \mathbf{H}'_a \neq \{0\}$, et montrons que cela nous conduit à une contradiction.

Soit $T_a = \begin{bmatrix} T'_a & * \\ O & T''_a \end{bmatrix}$ la triangulation de T_a correspondant à la décomposition $\mathbf{H}_a = \mathbf{H}'_a \oplus \mathbf{H}''_a$. Pour tout $h \in \mathbf{H}''_a$ et $x < a$ on a

$$u_x(T)u_{a-x}(T_a)h = u_x(T_a)u_{a-x}(T_a)h = u_a(T_a)h = m_{T_a}(T_a)h = 0,$$

d'où

$$u_{a-x}(T_a)h \in \mathbf{H}_x.$$

Comme $\mathbf{H}_x \subset \mathbf{H}'_a$, cela entraîne $u_{a-x}(T''_a)h = P''_a u_{a-x}(T_a)h = 0$. Par conséquent $u_{a-x}(T''_a) = O$ pour tout $x < a$. Donc $m_{T''_a}(\lambda)$ est un diviseur de $u_{a-x}(\lambda)$ pour tout $x < a$. Or, évidemment, les fonctions $u_{a-x}(\lambda)$ $(0 < x < a)$ n'ont pas de diviseur commun intérieur non constant, ce qui présente une contradiction parce que $m_{T''_a}(\lambda)$, comme fonction minimum d'une contraction dans un espace différent de $\{0\}$, ne peut être une constante de module 1. Ainsi, on a établi toutes les propriétés (2. 5)—(2. 7).

Reste à envisager le cas où T est unicellulaire. Soit $\mathbf{M}$ un sous-espace invariant pour T, non banal, et soit $a = \sup\{x : \mathbf{H}_x \subseteqq \mathbf{M}\}$. Grâce à (2. 7) on a alors aussi $\mathbf{H}_a \subseteqq \mathbf{M}$ et par conséquent $a < a_T$. Pour $a < x < a_T$, $\mathbf{H}_x$ n'est pas inclus dans $\mathbf{M}$, donc, en vertu de ce que T est unicellulaire, $\mathbf{M}$ doit être inclus dans $\mathbf{H}_x$. Vu (2. 6) cela entraîne

$$\mathbf{M} \subseteqq \bigcap_{x > a} \mathbf{H}_x = \mathbf{H}_a.$$

Donc $\mathbf{M} = \mathbf{H}_a$.

Remarques. 1. D'après la proposition 1. 2 toute contraction unicellulaire T, aux indices de défaut finis et telle que $\sigma(T) = \{1\}$, a sa fonction minimum égale à $u_{a_T}(\lambda)$. Le cas où $\sigma(T) = \alpha_T$, $|\alpha_T| = 1$, peut être réduit à celui-ci en envisageant $\bar{\alpha}_T T$ au lieu de T.

2. Pour toute contraction T dont 1 n'est pas une valeur propre, donc en particulier pour toute contraction complètement non-unitaire, les opérateurs $u_a(T)$ $(0 \leqq a < \infty)$ forment un semi-groupe continu de contractions, notamment le semi-groupe dont la cogénératrice est égale à T; *cf.* [III]. Cette remarque indique la voie par laquelle on pourra lier l'étude des opérateurs dissipatifs unicellulaires à celle des semi-groupes de contractions.

3. Conditions suffisantes pour l'unicellularité

1. Cherchons des conditions pour l'unicellularité de la contraction T qui sont liées de manière plus intime à la fonction caractéristique $\{\mathbf{D}_T, \mathbf{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$ où

$$\text{(3. 1)} \qquad \Theta_T(\lambda) = \left[-T + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n D_{T^*} T^{*n-1} D_T\right] \Big| \mathbf{D}_T; \quad \textit{voir } [\text{VIII}].$$

Dans le cas où $T \in C_{00}$, $\Theta_T(\lambda)$ est une fonction *intérieure des deux côtés.* [7]) Si de plus T a ses indices de défaut finis, ils sont nécessairement égaux au même nombre naturel N et en choisissant dans $\mathbf{D}_T$ et $\mathbf{D}_{T^*}$ deux bases orthonormales, ces espaces se représentent unitairement par le même espace euclidien E^N, formé des vecteurs à N composantes complexes (vecteurs-colonne), et $\Theta_T(\lambda)$ se représente par sa matrice

$$\Theta_T(\lambda) = [\theta_{ij}(\lambda)] \qquad (i, j = 1, \dots, N); \text{ [8])}$$

les fonctions scalaires $\theta_{ij}(\lambda)$ appartiennent à H^∞. Par conséquent

$$d_T(\lambda) = \det \Theta_T(\lambda)$$

appartient aussi à H^∞. De plus, comme la matrice $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire pour presque tous les t, on a $|d_T(e^{it})| = 1$ pp., donc $d_T(\lambda)$ est une fonction scalaire intérieure. En vertu du théorème 5 de [VIII], T appartient à la classe C_0 et on a

$$m_T(\lambda) = d_T(\lambda) \quad \text{si} \quad N = 1, \quad \text{et} \quad m_T(\lambda) = d_T(\lambda)/k(\lambda) \quad \text{si} \quad N > 1,$$

où $k(\lambda)$ est le plus grand diviseur intérieur commun des mineurs d'ordre $N-1$ de la matrice $\Theta_T(\lambda)$. En d'autres termes, $k(\lambda)$ est le plus grand diviseur intérieur commun des éléments de la matrice

$$\Theta_T^A(\lambda) = [\theta_{ij}^A(\lambda)] \qquad (i, j = 1, \dots, N),$$

algébriquement adjointe à $\Theta_T(\lambda)$. (Notons que tous les mineurs de la matrice $\Theta_T(\lambda)$, donc aussi les fonctions $\theta_{ij}^A(\lambda)$ appartiennent à H^∞.) On a donc

$$\theta_{ij}^A(\lambda) = k(\lambda)\omega_{ij}(\lambda) \qquad (i, j = 1, \dots, N) \tag{3.2}$$

où les fonctions $\omega_{ij}(\lambda)$ appartiennent à H^∞ et n'ont pas de diviseur intérieur commun non constant. Formons la matrice

$$\Omega_T(\lambda) = [\omega_{ij}(\lambda)] \qquad (i, j = 1, \dots, N);$$

les relations matricielles suivantes sont vérifiées:

$$\Theta_T(\lambda)\Theta_T^A(\lambda) = \Theta_T^A(\lambda)\Theta_T(\lambda) = d_T(\lambda)I_N, \tag{3.3}$$

$$\Theta_T(\lambda)\Omega_T(\lambda) = \Omega_T(\lambda)\Theta_T(\lambda) = m_T(\lambda)I_N \tag{3.4}$$

où I_N désigne la matrice unité d'ordre N.

Puisque $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire et $|d_T(e^{it})| = 1$, $|m_T(e^{it})| = 1$ pp., (3. 3) et (3. 4) entraînent que $\Theta_T^A(e^{it})$ et $\Omega_T(e^{it})$ sont aussi unitaires pp., donc les fonctions matricielles $\Theta_T^A(\lambda)$ et $\Omega_T(\lambda)$ sont intérieures des deux côtés.

Nous aurons besoin du suivant

[7]) Une fonction $\Theta(\lambda)$, à valeurs opérateurs, analytique et bornée dans le disque unité, est *intérieure* si $\Theta(e^{it})$ est un opérateur isométrique pour presque tous les t. Lorsque $\Theta(\lambda)$ et $\Theta^\sim(\lambda) = \Theta(\bar{\lambda})^*$ sont intérieures toutes les deux, on dira que $\Theta(\lambda)$ est *intérieure des deux côtés*. Cela revient à ce que $\Theta(e^{it})$ est unitaire pour presque tous les t. (Toute fonction intérieure scalaire est intérieure des deux côtés.)

[8]) Il convient et ne causera pas de confusion de désigner l'opérateur et sa matrice par la même lettre.

Lemme 3. *Soit T une contraction dans l'espace* $\mathbf{H}$, *de classe* C_0 *et aux indices de défaut égaux à* N. *Soit* $\mathbf{H}_i$ *un sous-espace non banal de* $\mathbf{H}$, *invariant pour* T. *Dans la triangulation* $T=\begin{bmatrix} T_1 & * \\ O & T_2 \end{bmatrix}$ *correspondant à la décomposition* $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$, *les opérateurs* T_1, T_2 *sont aussi de classe* C_0 *et aux indices de défaut au plus égaux à* N, *de plus on a*

$$d_T(\lambda) = d_{T_2}(\lambda)\, d_{T_1}(\lambda), \tag{3. 5}$$

à un facteur constant près, de module 1.

Démonstration. Au sous-espace invariant non banal $\mathbf{H}_1$ il correspond, d'après [IX], n[os] 3—4, une factorisation de la fonction caractéristique:

$$\Theta_T(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\,\Theta_1(\lambda), \tag{3. 6}$$

en des facteurs (matriciels) qui sont aussi fonctions intérieures des deux côtés et telles que les fonctions caractéristiques de T_1 et T_2 coïncident avec les "parties pures" $\Theta_1^0(\lambda)$, $\Theta_2^0(\lambda)$ de $\Theta_1(\lambda)$, $\Theta_2(\lambda)$, selon les cas; *voir* [IX], propositions 4. 3 et 4. 5. Or, on a

$$\Theta_k(\lambda) = \sigma_k \begin{bmatrix} \Theta_k^0(\lambda) & O \\ O & I_{(k)} \end{bmatrix} \sigma_k' \qquad (k=1, 2),$$

avec des matrices unitaires constantes σ_k, σ_k' et des matrices unité $I_{(k)}$ de certains ordres n_k où $0 \leqq n_k < N$. Il en résulte que, à des facteurs constants près, de module 1,

$$\det \Theta_k(\lambda) = \det \Theta_k^0(\lambda) \qquad (k=1, 2),$$

donc en vertu de (3. 6)

$$\det \Theta_T(\lambda) = \det \Theta_2^0(\lambda) \cdot \det \Theta_1^0(\lambda),$$

ce qui prouve (3. 5). Les autres assertions (d'ailleurs connues) découlent de ce que les fonctions caractéristiques (matricielles) $\Theta_k^0(\lambda)$ de T_k $(k=1, 2)$ sont de type $(N-n_k) \times (N-n_k)$, et intérieures des deux côtés.

2. Cela étant, nous faisons la

Proposition 3. 1. *Soit T une contraction dans l'espace* $\mathbf{H}$, *de classe* C_0, *aux indices de défaut finis égaux à* N, *et telle que*

$$m_T(\lambda) = \exp\left(a_T \frac{\lambda+\alpha_T}{\lambda-\alpha_T}\right) \quad \text{où} \quad a_T > 0,\ |\alpha_T| = 1. \tag{3. 7}$$

Soit de plus

$$d_T(\lambda) = m_T(\lambda). \tag{3. 8}$$

T est alors unicellulaire.

Démonstration. En remplaçant T au besoin par $\bar{\alpha}_T T$, on réduit le problème au cas où

$$m_T(\lambda) = u_{a_T}(\lambda) \equiv \exp\left(a_T \frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right).\ ^{9)}$$

[9]) On déduit de (3. 1) sans peine que $\Theta_{cT}(\lambda) = c\Theta_T(\bar{c}\lambda)$ si $|c|=1$, d'où $d_{cT}(\lambda) = c^N d_T(\bar{c}\lambda)$. Rappelons que, à cause du choix arbitraire des bases orthonormales dans les espaces de défaut, $d_T(\lambda)$ n'est défini qu'à un facteur constant près, de module 1.

Montrons d'abord que, dans ces hypothèses sur T, (3. 8) entraîne $d_{T_1}(\lambda) = m_{T_1}(\lambda)$ pour toute restriction $T_1 = T|\mathbf{H}_1$ à un sous-espace invariant pour T. En effet, en prenant la triangulation correspondante de T comme dans le lemme ci-dessus, on aura $d_T(\lambda) = d_{T_1}(\lambda) d_{T_2}(\lambda)$. D'autre part, $m_T(\lambda)$ est, en vertu du lemme 1, un diviseur de $m_{T_1}(\lambda) m_{T_2}(\lambda)$. Comme $m_{T_1}(\lambda)$ est un diviseur de $d_{T_1}(\lambda)$ et $m_{T_2}(\lambda)$ un diviseur de $d_{T_2}(\lambda)$, l'équation $d_T(\lambda) = m_T(\lambda)$ n'est possible que si $d_{T_1}(\lambda) = m_{T_1}(\lambda)$ et $d_{T_2}(\lambda) = m_{T_2}(\lambda)$.

Cela étant, envisageons deux sous-espaces invariants pour T, non banaux, soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Pour $A = T|\mathbf{A}$ et $B = T|\mathbf{B}$ les fonctions minimum sont des diviseurs de $m_T(\lambda) = u_{a_T}(\lambda)$, donc

$$m_A(\lambda) = u_a(\lambda) \quad \text{et} \quad m_B(\lambda) = u_b(\lambda) \quad \text{avec} \quad 0 < a \leqq a_T \quad \text{et} \quad 0 < b \leqq a_T;$$

on peut supposer $a \geqq b$. Le sous-espace

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$$

est aussi invariant pour T et la fonction minimum de $C = T|\mathbf{C}$ est le plus petit multiple intérieur commun de $m_A(\lambda)$ et $m_B(\lambda)$; *voir* [VII], n° 7. 3. Donc

$$m_C(\lambda) = u_a(\lambda).$$

Supposons que $\mathbf{A}' = \mathbf{C} \ominus \mathbf{A} \neq \{0\}$. A la décomposition $\mathbf{C} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}'$ il correspond alors une triangulation $C = \begin{bmatrix} A & * \\ O & A' \end{bmatrix}$ et, en vertu du lemme 3, on a

$$d_C(\lambda) = d_A(\lambda) d_{A'}(\lambda).$$

Or, $d_A(\lambda) = m_A(\lambda) = u_a(\lambda)$ et $d_C(\lambda) = m_C(\lambda) = u_a(\lambda)$, donc $d_{A'}(\lambda) = 1$, ce qui est impossible puisqu'on doit avoir $d_{A'}(A') = O$. Ainsi $\mathbf{A}' = \{0\}$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}$, et par conséquent $\mathbf{A} \supseteqq \mathbf{B}$.

Cela prouve que T est unicellulaire et achève la démonstration.

3. Dans le cas $N = 1$ la condition (3. 8) est toujours vérifiée. Ainsi, les propositions 1. 3 et 3. 1 ont comme corollaire la suivante

Proposition 3. 2. *Soit T une contraction dans l'espace* $\mathbf{H}$ *de dimension infinie, complètement non-unitaire et aux indices de défaut égaux à* 1. *Pour que T soit unicellulaire, il faut et il suffit que son spectre $\sigma(T)$ soit constitué d'un seul point α_T, $|\alpha_T| = 1$.*

On sait que deux contractions de classe C_0, ayant les indices de défaut égaux à 1, sont déterminées par leurs fonctions minimum à équivalence unitaire près. Or, il est facile à vérifier que si T_0 a ses indices de défaut 1, 1 et sa fonction minimum est de la forme (3. 7) avec $a_{T_0} = 1$ et $\alpha_{T_0} = 1$,

$$T = \bar{\alpha}\left(T_0 + \frac{1-a}{1+a} I\right)\left(I + \frac{1-a}{1+a} T_0\right)^{-1} \qquad (a > 0,\ |\alpha| = 1) \tag{3. 9}$$

sera de même type, avec $a_T = a$ et $\alpha_T = \alpha$. En effet, c'est une conséquence de [VIII], n° 2. 3, vu que dans notre cas la fonction caractéristique de T_0 coïncide avec la fonction scalaire $m_{T_0}(\lambda) \equiv u_1(\lambda)$. Cela prouve la proposition suivante:

Proposition 3.3. *Soit T_0 une contraction unicellulaire dans l'espace* $\mathbf{H}$ *de dimension infinie, aux indices de défaut* 1, 1, *et telle que* $a_{T_0}=\alpha_{T_0}=1$. *Toute contraction unicellulaire T dans* $\mathbf{H}$, *aux indices de défaut* 1, 1, *s'obtient alors, à équivalence unitaire près, par la formule* (3.9), *avec* $a=a_T$ *et* $\alpha=\alpha_T$.

4. Étude moyennant le modèle fonctionnel

1. Revenons à l'étude d'une contraction T dans $\mathbf{H}$, de classe C_0 et aux indices de défaut égaux à N. Représentons $\mathbf{H}$ et T par leur modèle fonctionnel:

$$\text{(4.1)}\quad \begin{aligned} \mathbf{H} &= H^2(E^N)\ominus\Theta_T H^2(E^N), \\ T^*u^N &= \frac{1}{\lambda}[u^N(\lambda)-u^N(0)], \quad u^N(\lambda)\in H^2(E^N).\end{aligned}$$ [10]

En vertu de (3.4) nous avons

$$m_T H^2(E^N) = \Theta_T\Omega_T H^2(E^N) \subseteqq \Theta_T H^2(E^N),$$

donc $\mathbf{H}$ est un sous-espace de l'espace fonctionnel

$$\text{(4.2)}\qquad \mathbf{G}^N = H^2(E^N)\ominus m_T H^2(E^N)$$

qui, à son tour, est évidemment la somme orthogonale de N répliques de l'espace

$$\text{(4.3)}\qquad \mathbf{G} = H^2\ominus m_T H^2.$$ [11]

Soient $S=S_T$ et S^N les contractions dans $\mathbf{G}$ et dans $\mathbf{G}^N$, selon les cas, définies par

$$\text{(4.4)}\qquad S^*u = \frac{1}{\lambda}[u(\lambda)-u(0)] \quad \text{pour} \quad u\in\mathbf{G}$$

et

$$\text{(4.5)}\qquad (S^N)^*u^N = \frac{1}{\lambda}[u^N(\lambda)-u^N(0)] \quad \text{pour} \quad u^N\in\mathbf{G}^N.$$

On a évidemment

$$\text{(4.6)}\qquad S^N = \bigoplus_1^N S, \qquad (S^N)^* = \bigoplus_1^N S^*\left(=(S^*)^N\right) \quad \text{et} \quad T^*=(S^N)^*|\mathbf{H}.$$

S est une contraction ayant les indices de défaut 1, 1 et sa fonction caractéristique coïncide avec la fonction $m_T(\lambda)$, d'où

$$\text{(4.7)}\qquad m_S(\lambda)=m_T(\lambda);$$

ces propriétés déterminent S à équivalence unitaire près.

Convenons de la notation

$$\text{(4.8)}\qquad \varphi^{\sim}(\lambda) = \overline{\varphi(\bar{\lambda})}$$

[10]) Bien entendu, l'indice N dans les notations E^N, u^N, $\mathbf{G}^N$, S^N etc. ne signifiera pas un exposant de puissance.

[11]) $H^2=H^2(E^1)$.

pour les fonctions scalaires, définies dans le disque unité. On a alors $m_{T^*}(\lambda) = = m_T^{\sim}(\lambda)$, $m_{S^*}(\lambda) = m_S^{\sim}(\lambda)$, donc (4. 7) entraîne $m_{S^*}(\lambda) = m_{T^*}(\lambda)$. En comparant cette équation à l'équation (4.7), appliquée à T^* au lieu de T, il résulte que $(S_T)^*$ et S_{T^*} ont les mêmes fonctions minimum que T^*. Comme de plus les contractions $(S_T)^*$ et S_{T^*} ont les indices de défaut 1, 1, elles sont unitairement équivalentes, Ainsi, T^* est unitairement équivalente à la restriction de $\bigoplus_1^N S_{T^*}$ à un sous-espace invariant. En appliquant ce résultat à T^* au lieu de T on obtient la suivante:

Proposition 4. 1. *Toute contraction T, de classe C_0, et aux indices de défaut finis égaux à N, est unitairement équivalente à la restriction de $S^N = \bigoplus_1^N S$ à un sous-espace invariant pour S^N, où S est la contraction, de classe C_0 et aux indices de défaut égaux à 1, qui a la même fonction minimum que T.* [12])

2. Il résulte aisément de la définition (4. 3) et (4. 4) de **G** et S que pour $u, v \in \mathbf{G}$ [13]) et pour $n=0, 1, 2, \ldots$ on a

$$(S^{*n}u, v)_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}[u(e^{it}) - u_0 - e^{it}u_1 - \ldots - e^{i(n-1)t}u_{n-1}]\,\overline{v(e^{it})}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\overline{e^{int}v(e^{it})}\,dt = (u, \lambda^n v)_{H^2} = \big(u, P_{\mathrm{G}}(\lambda^n v)\big)_{\mathrm{G}}$$

---

[12]) D'ailleurs *ce résultat est valable même pour une contraction $T \in C_0$ aux indices de défaut égaux à $N = \aleph_0$.* En effet, la relation $m_T(T) = O$ s'exprime, dans le modèle fonctionnel (4. 1), par la relation: $m_T\mathbf{H} \subseteqq \Theta_T H^2(\mathbf{E})$ où $\mathbf{E} = \mathbf{D}_T$; *voir* [VIII], n°6. Cela entraîne que $m_T H^2(\mathbf{E}) \subseteqq \Theta_T H^2(\mathbf{E})$. Donc, en particulier, on peut associer à tout vecteur $e \in \mathbf{E}$ une fonction $\omega_e(\lambda) \in H^2(\mathbf{E})$ de sorte qu'on ait $m_T(\lambda)e = \Theta_T(\lambda)\omega_e(\lambda)$. Vu que $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire pp., il en résulte

$$\|\omega_e(e^{it})\| = \|\Theta_T(e^{it})\omega_e(e^{it})\| = \|m_T(e^{it})e\| = \|e\| \quad \text{pp.}$$

De cette manière, en posant $\Omega_T(\lambda)e = \omega_e(\lambda)$ on a défini une fonction analytique contractive *intérieure* $\{\mathbf{E}, \mathbf{E}, \Omega_T(\lambda)\}$ telle que

$$m_T(\lambda)I = \Theta_T(\lambda)\Omega_T(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1).$$

Comme $|m_T(e^{it})| = 1$ et $\Theta_T(e^{it})$ est unitaire pp., il résulte que $\Omega_T(e^{it})$ est unitaire pp., donc $\Omega_T(\lambda)$ est même intérieure des deux côtés. D'ailleurs comme

$$\Theta_T(e^{it})[m_T(e^{it})I - \Omega_T(e^{it})\Theta_T(e^{it})] = [m_T(e^{it})I - \Theta_T(e^{it})\Omega_T(e^{it})]\,\Theta_T(e^{it}) = 0 \quad \text{pp.}$$

on a aussi $m_T(e^{it})I - \Omega_T(e^{it})\,\Theta_T(e^{it}) = 0$ pp. et par conséquent

$$m_T(\lambda)I = \Omega_T(\lambda)\,\Theta_T(\lambda) \qquad (|\lambda| < 1).$$

Ainsi, la fonction $\Omega_T(\lambda)$ vérifie les relations (3. 4) qui servissaient de point de départ pour les raisonnements ci-dessus.

[13]) $u(\lambda) = u_0 + \lambda u_1 + \cdots + \lambda^n u_n + \cdots$; $v(\lambda) = v_0 + \lambda v_1 + \cdots + \lambda^n v_n + \cdots$.

où $P_{\mathbf{G}}$ désigne la projection dans H^2 sur $\mathbf{G}$. Cela donne

$$S^n v = P_{\mathbf{G}}(\lambda^n v),$$

d'où on conclut:

$$\varphi(S)v = P_{\mathbf{G}}(\varphi v) \tag{4.9}$$

pour toute fonction scalaire $\varphi(\lambda) \in H^\infty$ et pour tout $v \in \mathbf{G}$.

Écrivons les éléments $u^N \in \mathbf{G}^N$ comme vecteurs-colonne aux composantes $u_i \in \mathbf{G}$ $(i=1, \ldots, N)$. A toute matrice

$$\Phi(\lambda) = [\varphi_{ij}(\lambda)] \qquad (i, j = 1, \ldots, N)$$

dont les éléments sont des fonctions scalaires $\varphi_{ij}(\lambda) \in H^\infty$, et à toute contraction complètement non-unitaire G dans $\mathbf{G}$, on peut associer la transformation

$$u^N \to v^N = \Phi(G)u^N$$

dans $\mathbf{G}^N$, définie par

$$v_i = \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}(G)u_j \qquad (i=1, \ldots, N).$$

Il est manifeste que $\Phi(G)$ est une transformation linéaire bornée dans $\mathbf{G}^N$, et que

$$(c\Phi)(G) = c \cdot \Phi(G), \quad (\Phi + \Psi)(G) = \Phi(G) + \Psi(G), \quad (\Phi\Psi)(G) = \Phi(G)\Psi(G),$$

$$\Phi(G)^* = \Phi^\sim(G)$$

où

$$\Phi^\sim(\lambda) = [\psi_{ij}(\lambda)] \quad \text{avec} \quad \psi_{ij}(\lambda) = \tilde{\varphi_{ji}}(\lambda).$$

Pour $G = S$ il résulte de (4.9):

$$[\Phi(S)u^N]_i = \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}(S)u_j = P_{\mathbf{G}} \sum_{j=1}^{N} \varphi_{ij}u_j = P_{\mathbf{G}}[\Phi u^N]_i \qquad (i=1, \ldots, N),$$

d'où

$$\Phi(S)u^N = P_{\mathbf{G}^N}(\Phi u^N) \quad \text{pour tout} \quad u^N \in \mathbf{G}^N. \text{ [14]} \tag{4.10}$$

Vu aussi la relation (4.2), (4.10) entraîne que, pour $u^N \in \mathbf{G}^N$, les conditions suivantes (i) et (ii) sont équivalentes:

$$\text{(i)} \quad \Phi(S)u^N = 0, \qquad \text{(ii)} \quad \Phi u^N \in m_T H^2(E^N).$$

En vertu de (4.2), la forme générale des éléments $v^N \in H^2(E^N)$ est la suivante:

$$v^N = w^N + m_T z^N$$

où $w^N \in \mathbf{G}^N$ et $z^N \in H^2(E^N)$. Cela donne

$$\Theta_T v^N = \Theta_T w^N + m_T \Theta_T z^N.$$

[14]) $P_{\mathbf{G}^N}$ désigne la projection orthogonale dans $H^2(E^N)$ sur $\mathbf{G}^N$.

Le terme $m_T\Theta_T z^N$, étant compris dans $m_T H^2(E^N)$, est orthogonal à $\mathbf{G}^N$, donc, eu égard à (4. 10), on a pour tout $u^N \in \mathbf{G}^N$:

$$(u^N, \Theta_T v^N)_{H^2(E^N)} = (u^N, \Theta_T w^N)_{H^2(E^N)} = (u^N, P_{\mathbf{G}^N}(\Theta_T w^N))_{\mathbf{G}^N} = (u^N, \Theta_T(S) w^N)_{\mathbf{G}^N}.$$

On conclut que pour $u^N \in \mathbf{G}^N$ les conditions suivantes (iii) et (iv) sont équivalentes:

$$\text{(iii)}\quad u^N \in H^2(E^N) \ominus \Theta_T H^2(E^N), \qquad \text{(iv)}\quad u^N \in \mathbf{G}^N \ominus \overline{\Theta_T(S)\mathbf{G}^N}.$$

Vu (4. 1) cela prouve la relation

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^N \ominus \overline{\Theta_T(S)\mathbf{G}^N}. \tag{4. 11}$$

On a aussi la relation suivante:

$$\mathbf{H} = \overline{\Omega_T(S)^* \mathbf{G}^N}. \tag{4. 12}$$

En effet, cela résulte des relations

$$\mathbf{G}^N \ominus \mathbf{H} = \Theta_T H^2(E^N) \cap \mathbf{G}^N = \{u^N : u^N \in \mathbf{G}^N, u^N \in \Theta_T H^2(E^N)\} =$$
$$= \{u^N : u^N \in \mathbf{G}^N, \Omega_T u^N \in m_T H^2(E^N)\} = \{u^N : u^N \in \mathbf{G}^N, \Omega_T(S) u^N = 0\} =$$
$$= \mathbf{G}^N \ominus \overline{\Omega_T(S)^* \mathbf{G}^N},$$

où l'on a fait usage de (3. 4), (4. 1), (4. 2) et de ce que $\Omega(e^{it})$ est unitaire pp. et que les conditions (i) et (ii) ci-dessus sont équivalentes.

Puisque $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}^N$, tout élément $u^N \in \mathbf{H}$ s'écrit comme un vecteur $[u_i]_1^N$ dont les composantes u_i appartiennent à $\mathbf{G}$. Donc, en posant

$$R_i u^N = u_i \qquad (i = 1, ..., N)$$

on a défini des transformations, évidemment linéaires et continues, de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$. En vertu de (4. 1) et (4. 4) il est manifeste que

$$R_i T^* = S^* R_i \qquad (i = 1, ..., N) \tag{4. 13}$$

et que

$$\mathbf{H}_i = \{u^N : u^N \in \mathbf{H}, R_i u^N = 0\} \qquad (i = 1, ..., N) \tag{4. 14}$$

sont des sous-espaces de $\mathbf{H}$, invariants pour T^*.

3. Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent portent sur toute contraction $T \in C_0$ dont les indices de défaut sont égaux à N. Dès maintenant nous faisons l'hypothèse additionnelle que T est *unicellulaire*. Parmi les sous-espaces invariants $\mathbf{H}_i$ que nous venons de construire il y a alors un, soit celui de rang i_*, qui est compris dans tous les autres. Cela veut dire que $R_{i_*} u^N = 0$ entraîne $R_i u^N = 0$ pour tout i, donc

$$R_{i_*} u^N = 0 \quad (u^N \in \mathbf{H}) \quad \text{entraîne} \quad u^N = 0. \tag{4. 15}$$

Posons

$$\overline{R_{i_*}\mathbf{H}} = \mathbf{G}';$$

vu (4. 15) il résulte aussitôt que $\mathbf{G}' \neq \{0\}$. En vertu de (4. 13) $\mathbf{G}'$ est invariant pour S^* et en posant $Z = S^* | \mathbf{G}'$, on a $R_{i_*} T^* = Z R_{i_*}$, d'où il dérive aussi $R_{i_*} \varphi(T^*) = \varphi(Z) R_{i_*}$ pour toute fonction $\varphi(\lambda) \in H^\infty$. Cela donne en particulier $R_{i_*} m_Z(T^*) = m_Z(Z) R_{i_*} = O$;

vu (4. 15) on conclut que $m_Z(T^*)=O$. Par conséquent la fonction $m_{T^*}(\lambda)$ est un diviseur intérieur de $m_Z(\lambda)$. D'autre part, si $\mathbf{G}'\neq\mathbf{G}$, la fonction caractéristique de S^* admet une factorisation non banale $\Theta_{S^*}=\Theta''\Theta'$ où $\Theta_{S^*}=m_{S^*}=m_{T^*}$ et $\Theta'=m_Z$. Ainsi, dans ce cas, $m_Z(\lambda)$ est un diviseur non banal de $m_{T^*}(\lambda)$, ce qui contredit le résultat précédent. Donc on a nécessairement $\mathbf{G}'=\mathbf{G}$, c'est-à-dire

$$\overline{R_{i_*}\mathbf{H}} = \mathbf{G}. \tag{4.16}$$

En vertu de (4. 15) et (4. 16) l'application linéaire continue R_{i_*} de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$ admet une inverse (au sens large), de domaine dense dans $\mathbf{G}$. Comme (4. 13) subsiste en particulier pour $i=i_*$, il résulte que T^* est une transformée quasi affine de S_T^* et par conséquent S_T est une transformée quasi affine de T; *voir* la définition donnée dans [VII], p. 27.

Comme T^* est aussi unicellulaire, le même résultat s'applique à T^* au lieu de T et fournit que $T=(T^*)^*$ est une transformée quasi affine de $(S_{T^*})^*$, donc aussi de S_T.[15])

Donc chacune des transformations T et S_T est une transformée quasi affine de l'autre, c'est-à-dire qu'elles sont quasi similaires.

Formulons ce résultat:

Proposition 4. 2. *Chaque contraction T de classe C_0, aux indices de défaut finis et unicellulaire, est quasi similaire à la contraction S aux indices de défaut égaux à 1 et ayant la même fonction minimum que T.*

Corollaire. *Deux contractions unicellulaires de classe C_0, aux indices de défaut finis et ayant la même fonction minimum, sont quasi similaires.*

Une autre conséquence de (4. 12) et (4. 16) est que les éléments de la forme $R_{i_*}\Omega_T(S)^*u^N$ $(u^N\in\mathbf{G}^N)$ sont denses dans $\mathbf{G}$. Cela revient à dire que les éléments de la forme

$$\sum_{j=1}^{N}\omega_{ji_*}^{\sim}(S^*)u_j \qquad (u_j\in\mathbf{G};\ j=1,\dots,N)$$

sont denses dans $\mathbf{G}$. Il s'ensuit que si $p(\lambda)$ est un diviseur intérieur commun des fonctions

$$\omega_{ji_*}(\lambda) \qquad (j=1,\dots,N), \tag{4.17}$$

$p^{\sim}(S^*)\mathbf{G}$ sera dense dans $\mathbf{G}$ et par conséquent $p(S)=p^{\sim}(S^*)^*$ admettra une inverse (au sens large). Comme

$$\sum_{j=1}^{N}\theta_{i_*j}(\lambda)\omega_{ji_*}(\lambda) = [\Theta_T(\lambda)\Omega_T(\lambda)]_{i_*i_*} = m_T(\lambda),$$

$p(\lambda)$ sera un diviseur aussi de $m_T(\lambda)$, donc on aura $m_T(\lambda)=p(\lambda)q(\lambda)$ avec une fonction $q(\lambda)$ intérieure, ce qui entraîne $p(S)q(S)=m_T(S)=m_S(S)=O$ et, vu que $p(S)^{-1}$ existe, $q(S)=O$. Par conséquent $m_S(\lambda)=m_T(\lambda)$ sera un diviseur de $q(\lambda)$, donc $q(\lambda)=m_T(\lambda)r(\lambda)$ où $r(\lambda)$ est une fonction intérieure. En combinant ces résul-

[15]) En effet, on a déjà observé que S_{T^*} est unitairement équivalente à $(S_T)^*$.

tats on obtient la relation $m_T(\lambda)=p(\lambda)m_T(\lambda)r(\lambda)$, ce qui n'est possible que si $p(\lambda)$ et $q(\lambda)$ sont des constantes (de module 1). Cela prouveque *les fonctions* (4. 17) *n'ont pas de diviseur intérieur commun non constant.*

Nous sommes à même de prouver la suivante réciproque de la proposition 3. 1:

Proposition 4. 3. *Soit T une contraction dans l'espace* $\mathbf{H}$, *de classe* C_0, *aux indices de défaut finis égaux à N, et telle que*

$$m_T(\lambda) = \exp\left(a_T\frac{\lambda+\alpha_T}{\lambda-\alpha_T}\right) \quad \text{où} \quad a_T>0,\ |\alpha_T| = 1.$$

Lorsque de plus T est unicellulaire, on a $d_T(\lambda)=m_T(\lambda)$.

Démonstration. Il ne restreint pas la généralité de supposer, tout comme dans la démonstration de la proposition 3. 1, que $\alpha_T=1$, donc

$$m_T(\lambda)=u_{a_T}(\lambda). \tag{4. 18}$$

Le cas $N=1$ est banal puisqu'on a alors toujours $d_T(\lambda)=m_T(\lambda)$.

Dans le cas $N=2$ on a

$$\Theta_T(\lambda) = \begin{bmatrix}\theta_{11}(\lambda) & \theta_{12}(\lambda)\\ \theta_{21}(\lambda) & \theta_{22}(\lambda)\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Theta_T^A(\lambda) = \begin{bmatrix}\theta_{22}(\lambda) & -\theta_{12}(\lambda)\\ -\theta_{21}(\lambda) & \theta_{11}(\lambda)\end{bmatrix},$$

donc le plus grand diviseur intérieur commun $k(\lambda)$ des éléments de la matrice $\Theta_T^A(\lambda)$ est aussi un diviseur des éléments de la matrice $\Theta_T(\lambda)$ et par conséquent on a

$$\Theta_T(\lambda)=\Theta'(\lambda)\cdot k(\lambda)I_2 \tag{4. 19}$$

où $\Theta'(\lambda)$ est une fonction matricielle intérieure des deux côtés (éventuellement constante). Supposons que la fonction $k(\lambda)$ n'est pas constante. De la factorisation (4. 19) il s'ensuit, en vertu du théorème 1 de [IX], qu'il existe un sous-espace $\mathbf{H}_1\neq\{0\}$ de $\mathbf{H}$, invariant pour T et tel que pour $T_1=T|\mathbf{H}_1$ on a $\Theta_{T_1}(\lambda)=k(\lambda)I_2$. Faisant usage du modèle fonctionnel de T_1 on obtient que T_1 est la somme orthogonale de deux répliques de la contraction dont la fonction caractéristique est la fonction scalaire $k(\lambda)$. Cela contredit ce que T est unicellulaire. Donc $k(\lambda)$ doit être constante, de module 1, et par conséquent on a $d_T(\lambda)=m_T(\lambda)$.

Reste à envisager le cas $N\geqq 3$.

Observons d'abord que, en prenant les déterminants, (3. 4) fournit:

$$d_T(\lambda)\cdot\det\Omega_T(\lambda)=[m_T(\lambda)]^N,$$

d'où

$$k(\lambda)\cdot\det\Omega_T(\lambda)=[m_T(\lambda)]^{N-1}=u_{(N-1)a_T}(\lambda). \tag{4. 20}$$

Or, la fonction $u_a(\lambda)$ a les seuls diviseurs intérieurs $u_b(\lambda)$ $(0\leqq b\leqq a)$, donc (4. 20) entraîne que

$$k(\lambda)=u_b(\lambda) \quad \text{où} \quad 0\leqq b\leqq(N-1)a_T.$$

Supposons que $k(\lambda)$ n'est pas constante (donc $b>0$) *et montrons que cette hypothèse nous conduit à une contradiction.*

Soit $p(\lambda)=u_c(\lambda)$ où $c=\min\{a_T, b\}>0$. Désignons par $\Theta_*(\lambda)$ la matrice qu'on obtient de $\Theta_T(\lambda)$ lorsqu'on écarte sa i_*-ième ligne. Il y a du moins un élément de $\Theta_*(\lambda)$ qui n'est pas divisible par $p(\lambda)$. En effet, au cas contraire, les mineurs d'ordre $N-1$ de $\Theta_*(\lambda)$, c'est-à-dire les fonctions

$$(4.21) \qquad \theta^A_{ji_*}(\lambda) = k(\lambda)\cdot\omega_{ji_*}(\lambda) \qquad (j=1, \dots, N)$$

sont divisibles par $p^{N-1}(\lambda)$, donc, vu que les fonctions (4. 17) n'ont pas de diviseur commun intérieur non constant, $k(\lambda)$ est divisible par $p^{N-1}(\lambda)$. Comme $k(\lambda)$ est un diviseur de $m_T^{N-1}(\lambda)$ [*voir* (4. 20)], il résulte que $p^{N-1}(\lambda)$ est un diviseur de $m_T^{N-1}(\lambda)$ et par conséquent $p(\lambda)$ est un diviseur de $m_T(\lambda)$. Donc $c\leqq a_T$, $c=b$, $p(\lambda)=k(\lambda)$, et par suite $p(\lambda)$ est divisible par $p^{N-1}(\lambda)$, ce qui contredit ce que $N-1 \geqq 2$ et que $p(\lambda)$ n'est pas une constante. Cela prouve notre assertion qu'au moins un des éléments $\theta_{ij}(\lambda)$ de la matrice $\Theta_*(\lambda)$ n'est pas divisible par $p(\lambda)$.

D'autre part, les mineurs d'ordre $N-1$ de $\Theta_*(\lambda)$, c'est-à-dire les fonctions (4. 21), sont divisibles par $k(\lambda)$ et par conséquent aussi divisibles par $p(\lambda)$.

Il s'ensuit qu'il existe un nombre entier r, $1<r\leqq N-1$, tel que tous les mineurs d'ordre r de $\Theta_*(\lambda)$ sont des fonctions divisibles par $p(\lambda)$, et qu'il existe un mineur $\delta(\lambda)$ d'ordre $r-1$ qui n'est pas divisible par $p(\lambda)$; $\delta(\lambda)$ est le déterminant d'une matrice $M_r(\lambda)$ formée de $r-1$ lignes et $r-1$ colonnes différentes de la matrice $\Theta_*(\lambda)$:

$$M_r(\lambda) = [\theta_{ij}(\lambda)] \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} i = i_1, \dots, i_{r-1} \qquad (i_m \neq i_* \text{ pour tout } m), \\ j = j_1, \dots, j_{r-1}. \end{array}$$

Fixons un entier i_r, $1\leqq i_r \leqq N$, différent de $i_1, \dots, i_{r-1}, i_*$; tel entier existe parce que $r\leqq N-1$. Désignons par $M_m(\lambda)$ $(m=1, \dots, r-1)$ la matrice qu'on obtient de $M_r(\lambda)$ en écartant sa m-ième ligne (provenant de la i_m-ième ligne de $\Theta_T(\lambda)$) et en ajoutant (à la fin) la nouvelle ligne

$$\theta_{i_r j_1}(\lambda), \theta_{i_r j_2}(\lambda), \dots, \theta_{i_r j_{r-1}}(\lambda).$$

Posons

$$\delta_i(\lambda) = \begin{cases} (-1)^m \det M_m(\lambda) \text{ pour } i = i_m \qquad (m=1, \dots, r), \\ 0 \text{ pour tout autre } i \text{ (en particulier pour } i=i_*). \end{cases}$$

Nous aurons alors, pour $n=1, \dots, N$,

$$(4.22) \qquad \sum_{i=1}^{N} \theta_{in}(\lambda)\delta_i(\lambda) = \sum_{m=1}^{r} (-1)^m \theta_{i_m n}(\lambda)\cdot\det M_m(\lambda) = \pm\det M^{(n)}(\lambda)$$

où $M^{(n)}(\lambda)$ désigne la matrice à r lignes et r colonnes

$$M^{(n)}(\lambda) = [\theta_{ij}(\lambda)], \qquad \begin{array}{l} i = i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, \\ j = j_1, j_2, \dots, j_{r-1}, n. \end{array}$$

$p(\lambda)$ est un diviseur de $\det M^{(n)}(\lambda)$ pour tout n. En effet, $\det M^{(n)}(\lambda)$ est un mineur d'ordre r de $\Theta_*(\lambda)$ si n est différent de $j_1, \dots, j_{r-1}$, et $\det M^{(n)}(\lambda)=0$ dans les autres cas. Les fonctions (4. 22) étant donc divisibles par $p(\lambda)$, les fonctions

$$\sum_{i=1}^{N} \theta_{in}^{\sim}(\lambda)\delta_i^{\sim}(\lambda) \qquad (n=1, \dots, N)$$

sont divisibles par $p^{\sim}(\lambda)$. Il s'ensuit que pour tout $v \in \mathbf{G}$ tel que

$$p^{\sim}(S^*)v = 0 \qquad (S = S_T), \tag{4.23}$$

on a

$$\sum_{i=1}^{N} \theta_{in}^{\sim}(S^*)\delta_i^{\sim}(S^*)v = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N). \tag{4.24}$$

En posant

$$u_i = \delta_i^{\sim}(S^*)v \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

on aura $u^N = [u_i]_1^N \in \mathbf{G}^N$ et (4. 24) s'écrit sous la forme

$$\Theta_T(S)^* u^N = 0. \tag{4.25}$$

(4. 25) et (4. 11) entraînent que $u^N \in \mathbf{H}$. D'autre part, comme on a en particulier $\delta_{i_*}(\lambda) = 0$ et par conséquent $u_{i_*} = 0$, on aura (en vertu du choix de i_*), $u_i = 0$ pour tout i. Ainsi, (4. 23) entraîne $\delta^{\sim}(S^*)v = (-1)^r \delta_{i_r}^{\sim}(S^*)v = (-1)^r u_{i_r} = 0$. En désignant par Z la restriction de S^* au sous-espace $\mathbf{G}_0$ de $\mathbf{G}$ (évidemment invariant pour S^*) des vecteurs v caractérisés par (4. 23), on aura donc

$$\delta^{\sim}(Z) = \delta^{\sim}(S^*)\,|\,\mathbf{G}_0 = O.$$

D'autre part, il s'ensuit du lemme 2 et de la définition de $\mathbf{G}_0$ par (4. 23), que la fonction minimum de Z est égale à $p^{\sim}(\lambda)$. Donc $p^{\sim}(\lambda)$ est un diviseur de $\delta^{\sim}(\lambda)$. Cela contredit le fait que, par son choix, $\delta(\lambda)$ n'est pas divisible par $p(\lambda)$.

Cette contradiction a résulté de notre hypothèse que la fonction $k(\lambda)$ n'est pas constante. Donc $k(\lambda)$ *est constante*, de module 1, et par conséquent $d_T(\lambda) = m_T(\lambda)$. Cela achève la démonstration de la proposition 4. 3.

4. Observons que, grâce au théorème du maximum, une fonction scalaire intérieure $u(\lambda)$ est constante (de module 1) si $|u(0)| = 1$ et dans ce cas seulement. Par conséquent, si $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ sont des fonctions scalaires intérieures telles que $a(\lambda)$ est un diviseur de $b(\lambda)$ et que $a(0) \neq 0$, on a $a(\lambda) = b(\lambda)$ (à un facteur constant près, de module 1) si $|a(0)| = |b(0)|$ et dans se cas seulement.

Ainsi, pour une contraction T de type considéré dans la proposition 4. 3, on a $d_T(\lambda) = m_T(\lambda)$ si

$$|d_T(0)| = \exp(-a_T) \tag{4.26}$$

et dans ce cas seulement.

Or, $|d_T(0)|$ se calcule aussi de manière directe. En effet, en vertu de (3. 1) on a $\Theta_T(0) = -T|\mathbf{D}_T$, donc si l'on a choisi dans $\mathbf{D}_T$ et $\mathbf{D}_{T^*}$ les bases orthonormales $\{e_i\}_1^N$ et $\{e_{*i}\}_1^N$, on aura $d_T(0) = \det \mathfrak{T}$ où $\mathfrak{T}$ est la matrice aux éléments

$$t_{ij} = (-Te_j, e_{*i}) \qquad (i, j = 1, \ldots, N),$$

d'où

$$|d_T(0)|^2 = \det \mathfrak{T}^* \cdot \det \mathfrak{T} = \det(\mathfrak{T}^*\mathfrak{T}).$$

Faisant usage de ce que $Te_i \in \mathbf{D}_{T^*}$ on obtient

$$(\mathfrak{T}^*\mathfrak{T})_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \overline{t_{ki}}\, t_{kj} = \sum_{k=1}^{N} (-Te_j, e_{*k})(e_{*k}, -Te_i) = (-Te_j, -Te_i) = (T^*Te_j, e_i),$$

d'où il résulte que $|d_T(0)|^2$ est égal au déterminant de la matrice de $T^*T|\mathbf{D}_T$ associée à la base $\{e_i\}$ de $\mathbf{D}_T$. Or, pour une transformation linéaire A d'un espace de dimension finie, le déterminant de la matrice de A est le même pour n'importe quel choix de la base (orthonormale ou non). En choisissant pour base, dans notre cas, un système orthonormal de vecteurs propres de T^*T dans $\mathbf{D}_T$, on arrive au résultat

$$|d_T(0)|^2 = \prod_i \tau_i^2 \tag{4.27}$$

où τ_i^2 parcourt les valeurs propres de $T^*T|\mathbf{D}_T$ chacune suivant sa multiplicité. D'ailleurs, comme la partie de T^*T dans le sous-espace complémentaire $\mathbf{H}\ominus\mathbf{D}_T$ est égale à l'opérateur identique, cela revient à dire que τ_i^2 parcourt toutes les valeurs propres de T^*T, chacune suivant sa multiplicité.

En combinant les propositions 3. 1 et 4. 3 avec les remarques que nous venons de faire et avec les formules (4. 26) et (4. 27) nous parvenons à la suivante

Proposition 4. 4. *Soit T de classe C_0, aux indices de défaut finis, et ayant la fonction minimum*

$$\exp\left(a_T\frac{\lambda+\alpha_T}{\lambda-\alpha_T}\right) \qquad (a_T>0,\ |\alpha_T| = 1).$$

Pour que T soit unicellulaire il faut et il suffit que $\exp(-2a_T)$ *soit égal au déterminant de la matrice de $(T^*T)|\mathbf{D}_T$ par rapport à une base quelconque de $\mathbf{D}_T$, ou, ce qui revient au même, qu'on ait*

$$\exp(-2a_T) = \prod_i \tau_i^2$$

où τ_i^2 parcourt les valeurs propres de T^*T, chacune suivant sa multiplicité.

5. Transformations dissipatives

1. Nos résultats peuvent être étendus aussi à d'autres classes de transformations. Nous allons envisager notamment les transformations de l'espace $\mathbf{H}$ (de dimension infinie) de type

$$A = R+iQ, \quad Q\geqq O, \tag{5.1}$$

R et Q étant autoadjointes et bornées.

Vu que $Q\geqq O$, l'ensemble résolvant de A comprend tout le demi-plan inférieur. En effet, on a pour $\lambda = \mu-i\nu$ $(\nu>0)$ et pour tout $r>0$

$$A-\lambda I = (R-\mu I+irI)+i(Q+\nu I-rI) = r(B_r+iI)\left\{I-i(B_r+iI)^{-1}\left[I-\frac{1}{r}(Q+\nu I)\right]\right\}$$

où $B_r = \dfrac{1}{r}(R-\mu I)$; notons que $(B_r+iI)^{-1}$ existe au sens strict et est de norme $\leqq 1$ parce que B_r est autoadjointe. Comme $Q\geqq O$, on a $\left\|I-\dfrac{1}{r}(Q+\nu I)\right\|<1$ pour r assez élevés, donc, pour tels r, l'opérateur entre $\{\ \}$ sera de la forme $I-V_r$ avec $\|V_r\|<1$. On conclut que $A-\lambda I$ admet une inverse au sens strict.

Attachons à A la transformation

$$T = -(A-iI)(A+iI)^{-1} \tag{5.2}$$

qui est une contraction. En effet, T est définie partout dans $\mathbf{H}$ et on a pour $f \in \mathbf{H}$ quelconque, en posant $h = (A+iI)^{-1}f$,

$$\|f\|^2 - \|Tf\|^2 = \|(A+iI)h\|^2 - \|(A-iI)h\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\,(Ah, ih) = 4(Qh, h) \geqq 0.$$

De (5.2) on déduit

$$I+T = 2i(A+iI)^{-1}, \quad I-T = 2A(A+iI)^{-1}, \tag{5.3}$$

donc $I+T$ admet l'inverse au sens strict $\frac{1}{2i}(A+iI)$; et on a

$$A = i(I-T)(I+T)^{-1}. \tag{5.4}$$

Tout sous-espace $\mathbf{L}$ de $\mathbf{H}$, qui est invariant pour T, l'est aussi pour A. En effet comme

$$(T+\lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}(-T)^n \qquad (|\lambda|>1),$$

$\mathbf{L}$ est invariant pour $(T+\lambda I)^{-1}$ lorsque $|\lambda|>1$, et comme $(T+\lambda I)^{-1}$ tend vers $(T+I)^{-1}$ en norme lorsque $\lambda \to 1$, $\mathbf{L}$ sera invariant aussi pour $(T+I)^{-1}$ et, en vertu de (5.4), pour A.

Supposons, inversement, que $\mathbf{L}$ est un sous-espace invariant pour A. Choisissons un cercle, de centre λ_0 et de rayon r, tel qu'il contienne le demi-disque $\{\lambda: |\lambda| \leqq \|A\|, \mathrm{Im}\,\lambda \geqq 0\}$ dans son intérieur et le point $-i$ dans son extérieur. Le spectre de A étant compris dans ce demi-disque, on aura $r \geqq \lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda_0 I)^n\|^{1/n}$ (en vertu du théorème du rayon spectral); par conséquent on aura pour $|\lambda-\lambda_0| > r$:

$$R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} = [(A-\lambda_0 I)-(\lambda-\lambda_0)I]^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^{-n-1}(A-\lambda_0 I)^n,$$

d'où il résulte que $\mathbf{L}$ est invariant aussi pour R_λ. En particulier, $\mathbf{L}$ sera invariant pour $R_{-i} = (A+iI)^{-1}$ et par conséquent, en vertu de (5.2), aussi pour T.

Donc les sous-espaces invariants pour A sont aussi invariants pour T et inversement. Cela entraîne que *A est unicellulaire si T est unicellulaire, et dans ce cas seulement.*

Observons que pour tout $h \in \mathbf{H}$ tel que (Ah, h) est de valeur réelle, on a $Ah = A^*h$. En effet, on a alors $\|Q^{\frac{1}{2}}h\|^2 = (Qh, h) = \mathrm{Im}\,(Ah, h) = 0$, donc $Q^{\frac{1}{2}}h = 0$, $Qh = 0$, $Ah - A^*h = 2i\,Qh = 0$.

Il s'ensuit que pour r réel les équations $Ah = rh$, $A^*h = rh$ ont les mêmes solutions $h \in \mathbf{H}$. Ces solutions forment un sous-espace $\mathbf{N}_r$. Lorsque $\mathbf{N}_r = \{0\}$, $(A-rI)^{-1}$ existe et est de domaine dense dans $\mathbf{H}$. Lorsque $\mathbf{N}_r \neq \{0\}$, $\mathbf{N}_r$ réduit A à une transformation autoadjointe (notamment à la multiplication par r dans $\mathbf{N}_r$). Par conséquent, si A est *complètement non-autoadjointe* (ou *simple*, dans la terminologie de [2], c'est-à-dire que A n'est réduite par aucun sous-espace $\neq \{0\}$ à une transformation autoadjointe), le second cas n'est pas possible.

Finalement, on prouve par un calcul direct les relations

$$(5.5)\quad I-T^*T = J^*QJ, \quad I-TT^* = JQJ^* \quad \text{où} \quad J = I+T = 2i(A+iI)^{-1}.$$

2. Nous faisons maintenant l'hypothèse additionnelle que Q est de *rang fini.* De (5. 5) il s'ensuit que les indices de défaut de T seront égaux au rang de Q. On désigne la *classe* des transformations A de type (5. 1) avec Q de rang fini par (Ω^+); *cf.* [2].

Proposition 5. 1. *Pour $A \in (\Omega^+)$ unicellulaire le spectre $\sigma(A)$ est constitué d'un seul point r_A de l'axe réel, $(A-r_A I)^{-1}$ existe et est de domaine dense dans* **H**.

En effet, $\sigma(A)$ est, grâce à la relation (5. 4), le transformé de $\sigma(T)$ par l'application

$$\lambda \to i\frac{1-\lambda}{1+\lambda},$$

qui applique le cercle unité sur l'axe réel. Or, comme T est unicellulaire, $\sigma(T)$ est constitué d'un seul point α_T, $|\alpha_T|=1$ ($\alpha_T \neq -1$, *voir* (5. 3)). L'assertion sur $(A-r_A I)^{-1}$ résulte de ce qui précède, vu que toute A unicellulaire est complètement non-autoadjointe.

Si l'on remplace A par $A-r_A I$, le spectre de A se transfère au point 0, on ne sort pas de la classe (Ω^+) et on ne perd pas l'unicellularité. Ainsi, dans le problème de déterminer les transformations unicellulaires de classe (Ω^+), il ne re treint essentiellement pas la généralité de se borner à l'étude de la classe des transformations $A \in (\Omega^+)$ telles que $\sigma(A)=\{0\}$, *classe* qu'on désigne par (Ω_0^+). [16]) De plus il est légitimé de supposer en plus que A n'a pas la valeur propre 0 ou, ce qui revient ,au même, qu'elle est complètement non-autoadjointe. [17])

Soit donc $A \in (\Omega_0^+)$ et n'ayant pas la valeur propre 0. A admet alors une inverse, de domaine dense, et (5. 2) entraîne

$$(5.6)\qquad T = (A'+I)(A'-I)^{-1} \quad \text{où} \quad A'=(iA)^{-1}.$$

Cela montre que A' est la génératrice infinitésimale d'un semi-groupe continu de contractions, notamment du semi-groupe des contractions

$$T(s) = u_s(T) \quad \text{où} \quad u_s(\lambda) = \exp\left(s\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right), \qquad s \geqq 0;$$

cf. [III], n° II. En vertu du calcul fonctionnel développé dans [VI], n° 6, il est justifié de noter:

$$T(s)=\exp(sA').$$

Comme A est complètement non-autoadjointe, T est complètement non-unitaire, et comme $\sigma(A)=\{0\}$, on a $\sigma(T)=\{1\}$. En vertu de la proposition 1. 3, T est alors

---

[16]) C'est pour cette classe d'opérateurs que Brodsky et Livšitz [2] ont étudié l'unicellularité.

[17]) Nous savons qu'aucune transformation de classe (Ω^+), complètement non-autoadjointe, n'a pas de valeur propre réelle. Inversement, si $A \in (\Omega_0^+)$ et si A a une partie autoadjointe B non banale, on a $\sigma(B) \subseteqq \sigma(A)=\{0\}$, donc 0 est une valeur propre de B et par conséquent aussi de A.

de classe C_0 et sa fonction minimum est de la forme $u_{a_T}(\lambda)$ où $a_T>0$. Cela entraîne que

$$\exp(sA')=O \quad \text{pour} \quad s\geqq a_T \quad \text{et} \quad \exp(sA')\neq O \quad \text{pour} \quad 0\leqq s<a_T.$$

Supposons, inversement, que pour une transformation $A\in(\Omega_0^+)$ n'ayant pas la valeur propre 0, on a $\exp(sA')=O$ pour s assez élevés: soit s_A la plus petite des valeurs du paramètre s ayant cette propriété. On a alors $u_s(T)=O$ pour $s=s_A$, donc $T\in C_0$ et $m_T(\lambda)$ est un diviseur intérieur de $u_{s_A}(\lambda)$. Or cette fonction a les seuls diviseurs intérieurs $u_s(\lambda)$ où $0\leqq s\leqq s_A$, mais on a $\exp(sA')\neq O$ pour $s<s_A$. Il en résulte que $m_T(\lambda)=u_{s_A}(\lambda)$, ce qui veut dire que

$$a_T=s_A.$$

Afin d'adapter la proposition 4. 4 au cas qui nous occupe, écrivons Q sous la forme

$$Qf=\sum_{i=1}^{N}(f,q_i)q_i \tag{5. 7}$$

ce qui est possible parce que Q est de rang fini et $Q\geqq O$. En vertu de (5. 5) le sous-espace de défaut $\mathbf{D}_T$ est déterminé par les vecteurs

$$\varphi_i=J^*q_i \quad (i=1,\ldots,N) \quad \text{où} \quad J=2i(A+iI)^{-1} \tag{5. 8}$$

et on a

$$T^*T\varphi_k=\varphi_k-J^*QJ\varphi_k=\varphi_k-\sum_{i=1}^{N}(\varphi_k,\varphi_i)\varphi_i.$$

Donc $T^*T|\mathbf{D}_T$ a, par rapport aux vecteurs $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$, la matrice

$$[\delta_{ik}-(\varphi_k,\varphi_i)] \qquad (i,k=1,\ldots,N).$$

Cela étant, il ressort des propositions 3. 2, 3. 3 et 4. 4 la suivante

Proposition 5. 2. *Soit A une transformation dans l'espace* $\mathbf{H}$ *(de dimension infinie), de classe* (Ω_0^+). *Pour que A soit unicellulaire, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

a) $A'=(iA)^{-1}$ *existe, a son domaine dense dans* $\mathbf{H}$, *et est la génératrice infinitésimale d'un semi-groupe continu de contractions* $\exp(sA')$ $(s\geqq 0)$ *tel que* $\exp(sA')=O$ *pour* $s\geqq s_A$ *et* $\exp(sA')\neq O$ *pour* $0\leqq s<s_A$, *où* s_A *est une valeur finie positive dépendant de* A,

b) $\exp(-2s_A)=\det[\delta_{ik}-(\varphi_k,\varphi_i)]$, *les vecteurs* φ_i *étant définis par* (5. 7) *et* (5. 8).

Dans le cas où Q est de rang 1, *la condition* a) *est déjà suffisante. De plus le nombre s_A détermine alors A à équivalence unitaire près. Notamment, en fixant une transformation A_1 de la classe envisagée, toutes les autres en dérivent, à équivalence unitaire près, suivant la formule*

$$A=rA_1 \quad \textit{où} \quad r=s_A/s_{A_1}>0.$$

3. Envisageons, à titre d'exemple, la transformation

$$f(x) \to A_0 f(x) = i \int_0^x f(t)\,dt \tag{5.9}$$

dans $L^2(0, 1)$. Cette transformation intégrale est de type de Volterra, donc on a $\sigma(A_0) = \{0\}$. Pour $Q = \operatorname{Im} A_0$ on a

$$Qf(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)\,dt,$$

donc $Q \geqq O$ et Q est de rang 1. Ainsi, $A_0 \in (\Omega_0^+)$. Il est aisé de vérifier que $A_0' = (iA)^{-1}$ est la génératrice infinitésimale du semi-groupe des contractions définies par

$$\exp(sA')f(x) = \begin{cases} f(x-s) & \text{pour} \quad x \in [s, \infty] \cap [0, 1], \\ 0 & \text{ailleurs;} \end{cases}$$

donc $s_{A_0} = 1$. En vertu de la proposition 5. 2, A_0 *est unicellulaire*[18]) *et toute autre transformation unicellulaire de classe* (Ω_0^+) *pour laquelle* Q *est de rang* 1, *est unitairement équivalente à un multiple positif de* A_0.[19])

4. Il est manifeste que deux transformations de classe (Ω_0^+) sont quasi similaires si les contractions T correspondantes sont quasi similaires, et inversement. Vu que, dans le cas d'une transformation A de classe (Ω_0^+), unicellulaire, la fonction minimum de T est déterminée par la valeur du paramètre $a_T = s_A$, il résulte du corollaire de la proposition 4. 2:

Proposition 5. 3. *Deux transformations de classe* (Ω_0^+), *unicellulaires et ayant la même valeur* s_A, *sont quasi similaires. En particulier,* A *est quasi similaire à* $s_A \cdot A_0$ *où* A_0 *est la transformation de* $L^2(0, 1)$, *définie par* (5. 9).

De manière analogue, la proposition 4. 1 entraîne la suivante:

Proposition 5. 4. *Toute transformation* $A \in (\Omega_0^+)$ *telle que* $\operatorname{Im} A$ *est de rang* N *et qui n'a pas la valeur propre* 0, *est unitairement équivalente à la restriction de la transformation* $s_A \cdot A_0^N$ *à un sous-espace invariant pour celle-ci;* A_0^N *désigne la somme orthogonale de* N *répliques de la transformation* A_0 *de* $L^2(0, 1)$, *définie par* (5. 9).

La transformation A_0 est de type de Hilbert—Schmidt et il en est de même pour A_0^N ainsi que pour toute restriction de celle-ci à un sous-espace invariant. On obtient donc comme *corollaire* de la proposition 5. 4 que toute transformation $A \in (\Omega_0^+)$ est de type de Hilbert—Schmidt. C'est en fait un cas particulier d'un résultat de Sakhnovič [4] affirmant que si $A = R + iQ$ où Q est de type de Hilbert—Schmidt et $\sigma(A) = \{0\}$, alors A est aussi de type de Hilbert—Schmidt. Toutefois, pour les transformations y envisagées, proposition 5. 4 semble être nouvelle et contient beaucoup plus d'information que celle que nous venons de formuler comme corollaire.

[18]) Fait démontré déjà par Brodsky et Livšitz [2].
[19]) Fait démontré déjà par Šmulyan [3].

Ouvrages cités

[III, V—IX] Béla Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert.
III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26—46.
V. Translations bilatérales, *ibidem*, **23** (1962), 106—129.
VI. Calcul fonctionnel, *ibidem*, **23** (1962), 130—167.
VII. Triangulations canoniques. Fonctions minimum, *ibidem*, **25** (1964), 12—37.
VIII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels, *ibidem*, **25** (1964), 38—71.
IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants, *ibidem*, **25** (1964), 283—316.

[IX]* B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Corrections et compléments aux Contractions IX, *ibidem*, **26** (1965), 193—196.

[1] М. С. Бродский—И. Ц. Гохберг—М. Г. Крейн—В. И. Мацаев, О некоторых новых исследованиях по теории несамосопряженных операторов, *Труды четвертого математического съезда*, Ленинград, 3—12 июля 1961 г., том II (1964), 261—271.

[2] М. С. Бродский—М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторови промежуточные системы, *Успехи Матем. Наук*, XIII, **1** (**79**) (1958), 3—85.

[3] Ю. Л. Шмульян, Некоторые вопросы теории операторов с конечным рангом неэрмитовости, *Матем. сборник*, нов. сер. **58** (**99**) (1962), 105—136.

[4] Л. А. Сахнович, Исследование „треугольной моделы" несамосопряженных операторов, *Изв. высш. учебн. завед., Математика*, **4** (**11**) (1959), 141—149.

(Reçu le 28 décembre 1964)

On maximum theorems for analytic operator functions

By ARLEN BROWN and R. G. DOUGLAS in Ann Arbor (Michigan, U. S. A.)

1. Introduction. Let $\mathfrak{H}$ be a complex Hilbert space and $\mathfrak{L}$ be the ring of bounded linear operators defined on $\mathfrak{H}$. A function $T=T(\xi)$ from an open subset Δ of the complex plane to $\mathfrak{L}$ is an *analytic operator function* if the scalar function $(T(\xi)x, y)$ is analytic on Δ for every pair of vectors x, y in $\mathfrak{H}$. The purpose of the present note is to discuss various maximum modulus theorems for such functions, as well as certain other results obtainable by a more or less direct exploitation of the maximum modulus principle for ordinary scalar functions.

2. Maximum modulus theorems. If $\|T\|$ is used as a measure of the size of T, then the following theorem, which we state for the sake of completeness, is the natural version of the maximum modulus principle for operator functions.

Theorem 1. *If $T(\xi)$ is an analytic operator function on a connected domain Δ, and if $\|T(\xi)\|$ assumes its maximum on Δ, then $\|T(\xi)\|$ is constant on Δ.*

(This result is in the literature; see e. g., [1, 3. 13]. The proof is an obvious modification of the proof of Theorem 2 below.)

Another gauge of the size of an operator T is the *numerical radius:* $w(T)=$ $=\sup\{|(Tx, x)|: \|x\|=1\}$. Using this we obtain another maximum modulus principle.

Theorem 2. *If $T(\xi)$ is an analytic operator function on a connected domain Δ, and if $w(T(\xi))$ assumes its maximum on Δ, then $w(T(\xi))$ is constant on Δ.*

Proof. Choose $\xi_0\in\Delta$ such that $w(T(\xi))\leqq w(T(\xi_0))=w_0$ for all $\xi\in\Delta$, and select a sequence $\{x_n\}$ of unit vectors in $\mathfrak{H}$ such that $|(T(\xi_0)x_n, x_n)|\to w_0$. The functions $\varphi_n(\xi)=(T(\xi)x_n, x_n)$ are all analytic on Δ and are uniformly bounded by w_0. Hence there exists a subsequence converging subuniformly on Δ to an analytic limit ψ. Clearly $|\psi(\xi)|\leqq w_0$, $\xi\in\Delta$, and $\psi(\xi_0)=\varepsilon w_0$, $|\varepsilon|=1$, so that, by the maximum modulus principle $\psi\equiv\varepsilon w_0$. In particular, $\{\varphi_n(\xi)\}$ contains a subsequence tending to εw_0 for each $\xi\in\Delta$, and the theorem follows.

Our next maximum modulus theorem is unique in that it employs a set valued function. For any point set S, we denote by S^- its closure.

Theorem 3. *If $T(\xi)$ is an analytic operator function on a connected domain Δ, and if the numerical range $W(T(\xi))$ assumes its maximum on Δ at a ξ_0, in the sense that $W(T(\xi))\subset W(T(\xi_0))^-$ for every $\xi\in\Delta$, then $W(T(\xi))$ is independent of ξ.*

Note. The *numerical range* $W(T)$ of an operator T is the (numerical) set $\{(Tx, x): \|x\|=1\}$. We employ the well known fact that $W(T)$ is convex.

Proof. Let l be a line of support for the compact convex set $W(T(\xi_0))^-$, and let λ_0 be a point on l. We shall show (i) if $\lambda_0 \in W(T(\xi_0))^-$ then $\lambda_0 \in W(T(\xi))^-$ for all $\xi \in \Delta$, and likewise (ii) if $\lambda_0 \in W(T(\xi_0))$ then $\lambda_0 \in W(T(\xi))$ for all $\xi \in \Delta$. In both cases it is no loss of generality to assume that $\lambda_0 = 0$ and that l is the imaginary axis, since we may replace the given function T by a linear transform $\alpha_0 T - \lambda_0$ without affecting the hypotheses of the theorem in any way. Similarly, we may and do assume that all the sets $W(T(\xi))$ lie in the positive half-plane $\operatorname{Re} \xi \geqq 0$.

Proof of (ii). Choose a unit vector $x_0 \in \mathfrak{H}$ such that $(T(\xi_0)x_0, x_0) = 0$. Then $\varphi(\xi) = (T(\xi)x_0, x_0)$ is an analytic function on Δ with non-negative real part and with a zero at ξ_0. The ordinary maximum modulus principle applied to $e^{-\varphi}$ shows that $\varphi \equiv 0$ and the result follows.

Proof of (i). Choose a sequence $\{x_n\}$ of unit vectors such that $(T(\xi_0)x_n, x_n) \to 0$ and let $\varphi_n(\xi) = (T(\xi)x_n, x_n)$ for all $\xi \in \Delta$. Since $|\varphi_n(\xi)| \leqq w(T(\xi_0))$ the sequence $\{\varphi_n\}$ is uniformly bounded and therefore possesses a subsequence converging sub-uniformly on Δ to a limit ψ. Clearly $\operatorname{Re} \psi \geqq 0$ and $\psi(\xi_0) = 0$ and it follows, as before, that $\psi \equiv 0$. Thus 0 is a limit point of the sequence $\{\varphi_n(\xi)\}$ for every $\xi \in \Delta$ and (i) is proved.

Now, using (i) only, we see that each line of support for $W(T(\xi_0))^-$ meets all the sets $W(T(\xi))^-$ in the same segment, whence it follows by convexity that the set function $W(T(\xi))^-$ is constant. But then, the hypotheses of the theorem are satisfied with ξ replacing ξ_0 and it follows, by (ii), that any boundary point present in one $W(T(\xi))$ must be present in all.

The following theorem, while not perhaps deserving to be called a maximum modulus principle, is nevertheless closely related to the foregoing in spirit and method of proof. It was suggested to the authors by a result of DE BRANGES and ROVNYAK in an as yet unpublished manuscript.

Theorem 4. *Let $T(\xi)$ be an analytic operator function on a connected domain Δ and suppose that $T(\xi)$ is contraction valued, i. e., that $\|T(\xi)\| \leqq 1$ everywhere on Δ.*

(1) *If for some $x \neq 0$ in $\mathfrak{H}$ and some $\xi_0 \in \Delta$ we have $\|T(\xi_0)x\| = \|x\|$ then $T(\xi)x$ is constant on Δ.*

(2) *If a complex number γ of modulus one is in the spectrum of $T(\xi)$ for any one ξ_0, then it is in the spectrum of $T(\xi)$ for every $\xi \in \Delta$.*

(3) *If $1 + T(\xi)$ is invertible at any one point ξ_0 then it is invertible for every $\xi \in \Delta$.*

Sketch of proof. (1) Apply the maximum modulus principle to the function $\varphi(\xi) = (T(\xi)x, T(\xi_0)x)$.

(2) Since $|\gamma| = 1$ it is well known that γ is an approximate eigen-value of $T(\xi_0)$. Choose a sequence $\{x_n\}$ of unit vectors such that $(T(\xi_0) - \gamma)x_n \to 0$ and apply the usual argument to the sequence of functions $\varphi_n(\xi) = (T(\xi)x_n, x_n)$.

(3) Since $\|T(\xi)\| \leqq 1$, a simple computation shows that $\lambda = -1$ belongs to the spectrum of $T(\xi)$ if and only if it belongs to the closed numerical range $W(T(\xi))^-$. In other words, $1 + T(\xi)$ fails to be invertible when and only when the vertical line $\operatorname{Re} \lambda = -1$ supports $W(T(\xi))^-$ at the point $\lambda = -1$. The result now follows from the proof of Theorem 3 (see (ii) above).

3. Concluding remarks.

1. In the ordinary maximum modulus theorem for scalar valued functions the presence of a *local* maximum on a connected domain implies that the function *itself* is constant, not just its modulus. It is easy to see, but should be officially remarked, that such strong results cannot be obtained in the present setting. For example, if $1, \omega, \bar{\omega}$ denote the cube roots of unity then

$$T(\xi)=\operatorname{diag}(1, \omega, \bar{\omega}, \xi)$$

(on $\mathfrak{H}$ of dimension 4) has norm and numerical range both constant on the disc $|\xi|<\frac{1}{2}$. Likewise, $\|T\|$, $W(T)$ and $w(T)$ all have a local maximum at $\xi=0$ on the disc $|\xi|<1$. (It is, of course, impossible for any one of our three gauges of size of $T(\xi)$ to possess a strict maximum at an interior point.)

2. On the other hand, certain vestiges of the stronger theorem do survive. A case in point is part (1) of Theorem 4, along with the following two remarks, both of which are its immediate consequences.

Corollary to Theorem 4. *Let $T(\xi)$ be a contraction valued analytic operator function on a connected domain Δ. Then*

(a) *the null space of $1+T(\xi)$ is constant on Δ,*

(b) *if for some $\xi_0 \in \Delta$ the operator $T(\xi_0)$ is an isometry then $T(\xi)$ is constant on Δ.*

3. Is there a maximum modulus theorem for the spectral radius of $T(\xi)$? Or, perhaps, for the spectrum itself? These appear to be open questions. In any event, it does not seem to be possible to answer them with the elementary techniques of the present note.

Reference

[1] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups* (Providence, 1957).

(Received January 12, 1965)

Bibliographie

Ewald Burger, Einführung in die Theorie der Spiele. Mit Anwendungsbeispielen, insbesondere aus Wirtschaftslehre und Soziologie, 169 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1959.

Trotz seinem bescheidenen Umfang, ist das Buch von E. BURGER eine inhaltsreiche und moderne Zusammenfassung der von J. v. NEUMANN begründeten Spieltheorie.

In zahlreichen Gebieten des gesellschaftlichen Lebens, meistens im Wirtschaftsleben, kommen Probleme vor, in den das Interesse der Teilnehmer (der sogenannten „Spieler") miteinander in scharfem Konflikt stehen. Die Spieler müßen, manchmal auf Grund unvollständiger Information, nach gewißen Regeln Entscheidungen wählen, und ihr Gewinn oder Verlust werden durch diese Entscheidungen und durch gewisse Zufallsereignisse bestimmt. Die Interessenkonflikte lassen sich oft durch ein Strategiespiel darstellen. Ziel der Spieltheorie ist die Entscheidungen der Spieler mathematisch zu begründen.

Das Buch besteht aus vier Kapiteln und einem Anhang. Der erste Kapitel führt den Leser stufenweise, mit dem intuitiven Begriffe der Strategie beginnend, durch Beispiele mit wachsender Komplexheit auf die exakten mathematischen Definitionen des allgemeinen Spielbegriffes. Die in diesem Teile auftretenden Beispiele werden später neben anderen Anwendungsbeispielen ausführlich behandelt.

Der II. Kapitel behandelt die nichtkooperative Theorie der n-Personenspiele. Hier wird das Problem der exakten Definition des zunächst vagen Begriffes des rationalen Verhaltens der Spielgesellschaft angeworfen und mit dem Begriff des Gleichgewichtspunktes in Verbindung gesetzt; wenn n—1 Spieler der Gesellschaft sich an eine Gleichgewichtstrategie halten, so kann der n-te Spieler nicht besseres tun, als sich zu dieser Vereinbarung der anderen anzuschließen. Die Existenzsätze von ZERMELO—v. NEUMANN—KUHN (für endliche Spiele mit vollständiger Information) bzw. von NAKAIDO—ISODA (für gewisse kontinuierliche Spiele) sind vom Verfasser für gemischten Erweiterungen kontinuierlicher Spiele verallgemeinert. Der Satz von GALE erweitert den Existenzsatz für verallgemeinerte Spiele.

Der Verfasser führt den Leser durch einen deduktiven Weg zu den Zweipersonen—Nullsummen-Spielen, die den Gegenstand des III. Kapitels bilden. Nach dem Beweis des Minimax-Satzes von v. NEUMANN (für Spiele mit vollständiger Information) und des Neumannschen Hauptsatzes (für Matrixspiele) bekommt man als Folgerungen die Sätze von BOHNENBLUST—KARLIN—SHAPLEY (für Konvexspiele), von VILLE (für kontinuierliche Spiele) und von WALD (für Strategien mit beschränkter Dichte).

Wegen der Wichtigkeit der Matrixspiele ist ein schöner Paragraph für sie gewidmet. Nach dem elementaren Beweis des Neumannschen Hauptsatzes (der erste Beweis des Buches stützt sich auf den Brouwerschen Fixpunktsatz), wird die Frage behandelt, wie der Wert des Spieles und die optimale Strategien für beide Spieler ermittelt werden können. Diese Aufgabe läßt sich als ein Paar von dualen linearen Optimierungsaufgaben auffassen, deswegen wird auch die Simplex-Methode von DANTZIG hier behandelt. Andererseits zeigt ein Satz von DANTZIG, daß man jedes Paar zueinander dualer linearer Programme auf ein Matrixspiel zurückführen kann. Als Beispiel für die nicht elementare Anwendungen von Matrixspielen wird ein Modell einer expandierenden Wirtschaft von v. NEUMANN behandelt. Einige unendliche Zweipersonen—Nullsummen-Spiele schließen diesen Hauptteil des Buches.

Der letzte Kapitel ist der kooperativen Theorie allgemeiner Spiele gewidmet. Diese Theorie stützt sich auf die Arbeiten von v. NEUMANN, MORGENSTEIN und SHAPLEY. Die Existenz einer Lösung im Sinne des Neumannschen Lösungsbegriffes ist noch im allgemeinen nicht entschieden wohl aber im Falle von gewissen speziellen Spielklassen, z. b. bei SHAPLEYS Marktmodell und bei einer Klasse von $(n; k)$ Majoritätspielen von BOTT. Der letzte Paragraph ist dem Shapley-Wert der Spiele gewidmet.

Der Anhang enthält die Beweise der benötigten topologischen Hilfsmittel (des Spernerschen Lemmas, des Satzes von KNASTER—KURATOWSKI—MAZURKIEWICZ und der Fixpunktsätze von BROUWER und KAKUTANI).

L. Stachó (Szeged)

H. S. Ruse—A. G. Walker—T. J. Willmore, Harmonic spaces (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, 8), XII+240 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1961.

In this book the interested reader will find an excellent exposition of the fundamental results achieved in the past 25 years by a number of geometers on the theory of harmonic spaces. The monograph can serve as an introduction to a subject, which is, approximatively described, the study of a certain second-order partial differential equation, the generalized Laplace equation, in the framework of Riemannian spaces.

Roughly speaking, an analytic Riemannian manifold is a harmonic space H_n, if every point $P_0 \in H_n$ is the origin of a normal neighbourhood N, in which the Laplace equation $\Delta u = 0$ possesses a non-constant analytic solution, depending on the distance function $\Omega(P_0, P)$ only. This latter is the scalar function of P_0 and P, taking the value $\frac{1}{2} er^2$, where e is the indicator ($e = \pm 1$ or 0) and r measures the length of that geodesic arc P_0P which lies in N. Every R_n of constant curvature, for example, turns out to be an H_n.

An important subclass of harmonic spaces is that of the simply harmonic spaces $\{SH_n\}$. These are characterized by the property that $\chi(\Omega) = \Delta\Omega$ is constant. A criterion for an SH_n is that $\chi(\Omega) = n$ identically on the manifold. Locally flat manifolds, for example, belong to $\{SH_n.\}$

A set of conditions for an H_n is, in terms of the curvature tensor, an infinite sequence, which can be given by recurrence formulae. These involve the components of the curvature tensor together with those of its successive covariant derivatives. The first condition in the above sequence restricts the set of H_n's to a subclass of Einstein manifolds ($R_{ij} = \text{const.}\, g_{ij}$).

The conditions for an H_n will be considerably simplified by assuming the space to be symmetric in CARTAN's sense (the curvature tensor is covariant-constant). In this case the set of conditions reduces to a system of algebraic equations in the components of g_{ij} and R_{ijkl}, which is solvable under certain conditions. For example, a complete classification in terms of canonical forms is possible for symmetric harmonic spaces in dimension 4. By means of technique used in the theory of Lie groups certain harmonic symmetric spaces can be constructed.

Another class of Riemannian spaces having significance for harmonic theory is that of recurrent spaces (the curvature tensor has the form $R_{ijkl|m} = R_{ijkl}\varkappa_m$, where $\varkappa_m$ is the recurrence vector field). The infinite sequence of conditions for a harmonic space of recurrent type is again equivalent to a finite set of algebraic equations. A canonical form for the metric of general recurrent spaces can be constructed, which leads, among others, to the determination of all harmonic recurrent spaces. Examples show that among these spaces there are non-symmetric ones.

The reader is assumed to have some knowledge in tensor calculus. All other notions and kinds of technique required are described in the book.

The richness of results together with the high quality of presentation will surely awake interest in many readers, experts or beginners, for this important chapter of classical differential geometry.

The book contains a bibliography of all papers on harmonic spaces up to 1961.

G. Soós (Szeged)

L. Fuchs, Partially Ordered Algebraic Systems (International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Vol. 28), IX+229 pages, Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1963.

In den letzten Jahren nahm die Theorie der teilweise geordneten algebraischen Strukturen eine schwungvolle Entwicklung, die zur Folge ergab, daß in diesem Gebiet eine Reihe von neue Ergebnisse enthaltenden Arbeiten erschien. Dieses Buch liefert uns eine sehr elegante systematische Behandlung nicht nur der klassischen, aber auch der neuesten Resultate in dem im Titel genannten Gegenstand.

Nach einem einführenden Kapitel, in dem die Grundbegriffe u. a. die teilweise geordneten algebraischen Strukturen definiert sind, ist das Buch in drei Teile geteilt.

Im ersten Teil beschäftigt sich der Verf. mit teilweise geordneten Gruppen. Nach einigen Vorbereitungen sind in diesem Teil das direkte Produkt, das lexikographische Produkt und die Ordnungstopologie für teilweise geordnete Gruppen definiert und die Frage der Fortsetzung einer teilweisen Anordnung solcher Gruppen zu einer vollständigen Anordnung entwickelt. Ferner sind die linear angeordneten Gruppen, die Gruppen, deren jede teilweise Anordnung sich zu einer vollständigen Anordnung erweitern läßt, die archimedisch angeordneten Gruppen, die Bewertung von vollständig geordneten abelschen Gruppen und die zyklisch angeordneten Gruppen untersucht. In diesem Teil sind noch viele interessante Resultate für die Verbandsgruppen enthalten.

Der zweite Teil behandelt analoge Untersuchungen für teilweise geordnete Ringe und Schiefkörper. Hier findet man auch eine Behandlung der Anordnung des Quotientenringes, der reell abgeschlossenen Körper, der vollständig geordneten Ringe (darunter der archimedisch angeordneten Ringe) und Schiefkörper. Dieser Teil findet seinen Abschluß mit Untersuchungen für die Verbandsringe.

Im dritten Teil werden die teilweise geordneten Halbgruppen untersucht. Hier ist die Frage über die Fortsetzung der Anordnung einer Halbgruppe zur Anordnung ihrer Quotientengruppe behandelt und es werden außerdem die vollständig geordneten Halbgruppen, die Unterhalbgruppen der additiven Gruppe der reellen Zahlen und eine spezielle Klasse vollständig geordneter Gruppoiden betrachtet. Ferner sind zahlreihe Resultate für Verbandshalbgruppen diskutiert.

Dem Verf. ist es gelungen, die Theorie der teilweise geordneten algebraischen Strukturen verschiedener Art von einem sehr einheitlichen Gesichtspunkt aus aufzubauen.

Dem Buch ist ein reichhaltiges Literaturverzeichnis beigefügt und es werden insgesamt 40 interessante offene Probleme aufgeworfen.

I. Peák (Szeged)

L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren, 316 Seiten, Budapest und Leipzig, Gemeinschaftsausgabe des Akadémiai Kiadó und der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1965.

Die Theorie der regulären Figuren ist im Grunde genommen eine der ältesten Theorien der Mathematik. Es ist wahrlich so und doch ist das Buch des Verfassers durch und durch modern. Es besteht aus zwei Teilen: Teil I behandelt die Systematologie und Teil II die Genetik der regulären Figuren. Diese beiden Gesichtspunkte zusammenzuschließen und hiermit die Grundlage einer einheitlichen, umfaßenden Theorie der regulären Figuren zu schaffen ist das Hauptziel des Verfassers. Schon das erste Kapitel ist eine auch didaktisch sehr wertvolle Auseinandersetzung der kongruenten Transformationen der Ebene: der Verfasser weist mit neuartigen elementaren geometrischen und gruppentheoretischen Methoden auf bekannte Tatsachen hin und versäumt nirgends seine Behauptungen mit künstlerischen und kunstgeschichtlichen Illustrationen zu veranschaulichen. Es wird somit die Behauptung von Hermann Weyl bestätigt: „Die Kunst der Ornamente enthält in impliziter Form die ältesten Kenntnisse aus dem Gebiet der höheren Mathematik."

Kapitel 2 behandelt — weniger eingehend — die änhlichen Probleme für den Raum. Kapitel 3 betrachtet die hyperbolische Ebene. Es wird eine didaktisch wertvoller und in sener Neuart schöner Aufbau der hyperbolischen Geometrie gegeben, ihrer Würde nach hochschätzend die Entdeckung von Johann Bolyai. Unter dem Titel „Polyeder" folgt die Behandlung der verschiedenen Arten von regulären Polyedern und danach werden entsprechende Probleme für mehrdimensionale Räume betrachtet.

Der zweite Teil — die Genetik — ist natürlich weniger ausführlich und mehr mosaikartig, demgegenüber bringt er eine Fülle von Problemen und Anregungen für den Forscher. Es folgen schöne und lehrreiche Abschnitte über Packungs- und Überdeckungsprobleme, Isoperimetrische Probleme in Zellenaggregaten, Packungen und Überdeckungen durch inkongruente Kreise.

Wertvoll sind die vom Verfasser bereits gewohnten Schlußkapitel, unter dem Titel „Anmerkungen", in welchen er in das Geschichtliche der Probleme hineinleuchtet.

Das Ziel des Verfassers wurde erreicht: sein Buch ist schön, interessant und leicht verständlich.

J. Berkes (Szeged)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

Colloquium on the Foundations of Mathematics, Mathematical Machines and Their Applications, Tihany, 11—15 September, 1962, edited by L. Kalmár, 320 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1965.

Colloquium on Applications of Mathematics to Economics, Budapest, 1963, edited by A. Prékopa, 367 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1965.

E. Hewitt—K. Stromberg, Real and abstract analysis, A modern treatment of the theory of functions of a real variable, VIII+476 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1965. — DM 38,—

T. Matsusaka, Theory of Q-varieties (Publications of the Mathematical Society of Japan, 8), X+158 pages, Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1965.

L. Rédei, The theory of finitely generated commutative semigroups (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 82), translation edited by N. Reilly, XIII+353 pages, Oxford—London—Edinburgh—New York—Paris—Frankfurt, Pergamon Press, 1965.

——— **Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien nach F. Klein,** 363 Seiten, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1965.

F. Riesz—B. Sz.-Nagy, Leçons d'analyse fonctionnelle, 4. édition, VIII+490 pages, Budapest—Paris, Akadémiai Kiadó—Gauthier-Villars, 1965.

S. L. Sobolew, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik (Mathematische Lehrbücher und Monographien, I. Abteilung: Mathematische Lehrbücher, Bd. 12), 218 Seiten, Berlin, Akademie-Verlag, 1964. — MDN 25,—

B. Sz.-Nagy, Introduction to real functions and orthogonal expansions, XI+447 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1964.

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1

Prix d'abonnement pour l'étranger $ 8.50. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, I. Fő utca 32).

INDEX: 26024

65-5786 Szegedi Nyomda Vállalat

Felelős szerkesztő és kiadó: Szőkefalvi-Nagy Béla
A kézirat nyomdába érkezett: 1965. július hó
Megjelenés: 1965. december hó

Példányszám: 825. Terjedelem: 11,5 (A/5) ív
Készült monószedéssel, íves magasnyomással az MSZ 5601-54 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint